CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny** **Test diagnostyczny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Forma arkusza:	MMAP-P0-660-2212
Data publikacji dokumentu:	15 grudnia 2022 r. (wersja 1)

Uwagi:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

2. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] mnożenie, […] potęgowanie, […]) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. 2022, poz.1246).

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.8) wykorzystuje własności potęgowania […] w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych z kapitalizacją roczną i zysków z lokat.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: […] $a^2 - b^2$; II.6) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach; I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na […] logarytm potęgi; V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 7.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji:[…] zbiór wartości […].

Zasady oceniania
1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie
$[-3, \infty)$

Zadanie 7.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej […]; V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia postaci kanonicznej funkcji f oraz zapisanie jej wzoru: $f(x) = 3(x-5)^2 - 3$.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = a(x-5)^2 - 3$ lub w postaci iloczynowej $f(x) = a(x-4)(x-6)$, lub w postaci ogólnej $f(x) = 3x^2 - 30x + 72$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej to

$$f(x) = a(x-5)^2 - 3, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Obliczamy a. Wykres funkcji przechodzi przez punkt o współrzędnych $(4, 0)$, zatem

$$0 = a \cdot (4-5)^2 - 3, \text{ czyli } 0 = a - 3$$

Stąd $a = 3$.
Wzór funkcji f w postaci kanonicznej to $f(x) = 3(x-5)^2 - 3$.

Sposób II

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej to

$$f(x) = a(x-5)^2 - 3, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Ponieważ wykres funkcji kwadratowej f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = 5$, więc miejscami zerowymi funkcji f są liczby 4 oraz 6.
Przyrównujemy postać iloczynową funkcji f do jej postaci kanonicznej:

$$a(x-4)(x-6) = a(x-5)^2 - 3$$

$$ax^2 - 10ax + 24a = ax^2 - 10ax + 25a - 3$$

$$a = 3$$

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej to $f(x) = 3(x-5)^2 - 3$.

Sposób III

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej to

$$f(x) = a(x-5)^2 - 3, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Ponieważ wykres funkcji kwadratowej f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = 5$, więc miejscami zerowymi funkcji f są liczby 4 oraz 6.
Zapisujemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej: $f(x) = a(x-4)(x-6)$

Podstawiając do tego wzoru współrzędne wierzchołka $(5, -3)$, otrzymujemy równanie

$$f(5) = a(5-4)(5-6) = -3$$

Stąd $a = 3$.

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej to $f(x) = 3(x-5)^2 - 3$.

Sposób IV

Wzór funkcji f w postaci ogólnej to

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Ponieważ wykres funkcji kwadratowej f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = 5$, więc jej miejscami zerowymi są liczby 4 oraz 6.
Do wykresu funkcji f należą punkty $(4,0)$, $(5,-3)$ oraz $(6,0)$.
Wstawiając ich współrzędne do wzoru funkcji f, otrzymujemy

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \\ -3 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \\ 0 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 16a + 4b + c \\ -3 = 25a + 5b + c \\ 0 = 36a + 6b + c \end{cases}$$

Stąd $a = 3$, $b = -30$, $c = 72$.

Zatem

$$f(x) = 3x^2 - 30x + 72$$

Wzór ten można przekształcić do postaci

$$f(x) = 3x^2 - 30x + 72 = 3(x^2 - 10x + 25) - 3 = 3(x-5)^2 - 3$$

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej to $f(x) = 3(x-5)^2 - 3$.

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci […] iloczynowej (jeśli istnieje). III.4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B1

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.1) […] podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.6) rozwiązuje równania wymierne w postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 14. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […].

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu, tj. rozpatrzenie dwóch przypadków: gdy $n = 2k$ oraz $n = 2k + 1$

ALBO

przekształcenie wyrażenia $5n^2 + 15n$ do postaci $5n(n + 3)$ oraz uzasadnienie, że liczba $5n(n + 3)$ dzieli się przez 2 i przez 5, czyli jest podzielna przez 10.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $5n^2 + 15n$ do postaci $5n(n + 3)$

ALBO

rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 2k$ (gdzie $k \in \mathbb{N}$), tj. przekształcenie wyrażenia $5n^2 + 15n$ do postaci $10 \cdot (2k^2 + 3k)$ i zapisanie, że liczba $2k^2 + 3k$ jest naturalna,

ALBO

rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 2k + 1$ (gdzie $k \in \mathbb{N}$), tj. przekształcenie wyrażenia $5n^2 + 15n$ do postaci $10 \cdot (2k^2 + 5k + 2)$ i zapisanie, że liczba $2k^2 + 5k + 2$ jest naturalna.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przedstawiamy liczbę $5n^2 + 15n$ w postaci iloczynu

$$5n^2 + 15n = 5n(n + 3)$$

Liczby n oraz $n + 3$ różnią się o liczbę nieparzystą. Zatem, jeśli n jest parzysta, wtedy $n + 3$ jest nieparzysta. Jeśli n jest nieparzysta, wtedy $n + 3$ jest parzysta. Wynika stąd, że liczba $5n(n + 3)$ dzieli się przez 2 i przez 5, czyli jest podzielna przez 10. To należało wykazać.

Sposób II

Rozważamy dwa przypadki: gdy liczba n jest parzysta i gdy liczba n jest nieparzysta.
Parzystą liczbę n możemy zapisać w postaci $n = 2k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.
Wtedy

$$5n^2 + 15n = 5(2k)^2 + 15 \cdot 2k = 20k^2 + 30k = 10 \cdot (2k^2 + 3k)$$

Ponieważ k jest liczbą naturalną, to liczba $2k^2 + 3k$ również jest naturalna, a iloczyn $10 \cdot (2k^2 + 3k)$ jest podzielny przez 10.

W przypadku, gdy liczba n jest nieparzysta, możemy ją zapisać w postaci $n = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.
Wtedy

$$5n^2 + 15n = 5(2k + 1)^2 + 15 \cdot (2k + 1) = 5(4k^2 + 4k + 1) + 30k + 15 =$$

$$= 20k^2 + 20k + 5 + 30k + 15 = 20k^2 + 50k + 20 = 10 \cdot (2k^2 + 5k + 2)$$

Ponieważ k jest liczbą naturalną, to liczba $2k^2 + 5k + 2$ również jest naturalna, a iloczyn $10 \cdot (2k^2 + 5k + 2)$ jest podzielny przez 10. To należało wykazać.

Sposób III

Przedstawiamy liczbę $5n^2 + 15n$ w postaci iloczynu

$$5n^2 + 15n = 5n(n + 3)$$

Rozważamy dwa przypadki: gdy liczba n jest parzysta i gdy liczba n jest nieparzysta.
Parzystą liczbę n możemy zapisać w postaci $n = 2k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.
Wtedy

$$5n^2 + 15n = 5 \cdot 2k(2k + 3) = 10k(2k + 3)$$

Ponieważ k jest liczbą naturalną, to liczba $2k + 3$ również jest naturalna, a iloczyn $10 \cdot k(2k + 3)$ jest podzielny przez 10.

W przypadku, gdy liczba n jest nieparzysta, możemy ją zapisać w postaci $n = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.
Wtedy

$$5n^2 + 15n = 5(2k + 1)(2k + 1 + 3) = 10(2k + 1)(k + 2)$$

Ponieważ k jest liczbą naturalną, to liczby $2k + 1$ oraz $k + 2$ również są naturalne, a iloczyn $10 \cdot (2k + 1)(k + 2)$ jest podzielny przez 10. To należało wykazać.

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.2) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący; VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FP

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.4) stosuje wzór na n–ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 17. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n–ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
2 pkt – wybranie dwóch odpowiedzi, z których obie są poprawne: A i E.
1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: A albo E.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie
AE

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 20. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	XIII. Zdający rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania
4 pkt – poprawna metoda obliczenia obu wymiarów kąpieliska oraz podanie poprawnych wyników: $a = 50$ m oraz $b = 100$ m.
3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole powierzchni kąpieliska w zależności od zmiennej a oraz podanie dziedziny funkcji $a \in (0, 100)$ i prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli: $a = 50$ m
ALBO
poprawne zapisanie wzoru na pole powierzchni kąpieliska w zależności od zmiennej b oraz podanie dziedziny funkcji $b \in (0, 200)$ i prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli: $b = 100$ m.
2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole powierzchni kąpieliska w zależności od jednej zmiennej: $P(a) = a(200 - 2a)$ lub $P(b) = b\left(100 - \frac{1}{2}b\right)$.
1 pkt – zapisanie związku między wymiarami kąpieliska: $2a + b = 200$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku w zadaniu. Długość liny użytej do wytyczenia kąpieliska – po uwzględnieniu warunków zadania – można zapisać równaniem

$$2a + b = 200$$

Stąd wyznaczamy b: $b = 200 - 2a$.
Z warunków zadania wynika, że

$$a > 0 \quad \text{i} \quad b > 0$$

Powierzchnia P kąpieliska jest równa polu prostokąta o bokach długości a oraz b. Zatem

$$P = a \cdot b$$

Powierzchnię kąpieliska wyrażamy jako funkcję jednej zmiennej a. W tym celu podstawiamy $b = 200 - 2a$ i otrzymujemy

$$P(a) = a(200 - 2a) = -2a^2 + 200a$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P. Wykorzystamy związek między wymiarami a i b oraz wykorzystamy warunki, jakie te wymiary spełniają

$$b = 200 - 2a > 0 \text{ oraz } a > 0$$

Zatem

$$a < 100 \text{ oraz } a > 0$$

Zmienna a może przyjmować wartości z przedziału $(0, 100)$.

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = -\frac{200}{2 \cdot (-2)} = 50 \in (0, 100)$$

Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu 50.

Obliczamy drugi wymiar, dla którego kąpielisko ma największą powierzchnię:

$$b = 200\text{ m} - 2 \cdot 50\text{ m} = 100\text{ m}$$

Największą powierzchnię ma kąpielisko o wymiarach: $a = 50$ m oraz $b = 100$ m.

Sposób II

Przyjmiemy oznaczenia jak na rysunku w zadaniu. Długość liny użytej do wytyczenia kąpieliska – po uwzględnieniu warunków zadania – można zapisać równaniem

$$2a + b = 200$$

Stąd wyznaczamy a: $a = 100 - \frac{1}{2}b$.
Z warunków zadania wynika, że

$$a > 0 \quad \text{i} \quad b > 0$$

Powierzchnia P kąpieliska jest równa polu prostokąta o bokach długości a oraz b. Zatem

$$P = a \cdot b$$

Powierzchnię kąpieliska wyrażamy jako funkcję jednej zmiennej b. W tym celu podstawiamy $a = 100 - \frac{1}{2}b$ i otrzymujemy

$$P(b) = b\left(100 - \frac{1}{2}b\right)$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P. Wykorzystamy związek między wymiarami a i b oraz wykorzystamy warunki, jakie te wymiary spełniają

$$a = 100 - \frac{1}{2}b > 0 \quad \text{oraz} \quad b > 0$$

Zatem

$$b < 200 \quad \text{oraz} \quad b > 0$$

Zmienna b może przyjmować wartości z przedziału $(0, 200)$.

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli jako średnią arytmetyczną pierwiastków równania:

$$b\left(100 - \frac{1}{2}b\right) = 0$$

Pierwiastkami tego równania są liczby

$$b_1 = 0 \ \text{ oraz } \ b_2 = 200$$

Zatem pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli jest równa

$$p = \frac{b_1 + b_2}{2} = 100 \in (0, 200)$$

Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu 100.

Obliczamy drugi wymiar, dla którego kąpielisko ma największą powierzchnię:

$$a = 100\ \text{m} - \frac{1}{2} \cdot 100\ \text{m} = 50\ \text{m}$$

Największą powierzchnię ma kąpielisko o wymiarach: $a = 50$ m oraz $b = 100$ m.

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.6) stosuje wzory na pole wycinka koła […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 23. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 3.Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w […] równoległobokach, rombach […]; VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
2 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz zapisanie wyniku: $a = \frac{48}{7}$.
1 pkt – zapisanie związku między długościami odcinków wynikającego z podobieństwa odpowiednich trójkątów, np. $\frac{|AF|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|BD|}$, $\frac{|BF|}{|FG|} = \frac{|AB|}{|AC|}$, $\frac{|KH|}{|OD|} = \frac{|KC|}{|OC|}$, $\frac{|KG|}{|OB|} = \frac{|KC|}{|OC|}$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech a oznacza długość boku rombu.

Trójkąty AEF i ADB są podobne oraz trójkąty FBG i ABC są podobne (na mocy cechy *kkk* podobieństwa trójkątów).

Zatem mamy zależności:

$$\frac{|AF|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|BD|} \text{ oraz } \frac{|BF|}{|FG|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

$$\frac{|AF|}{a} = \frac{|AB|}{12} \text{ oraz } \frac{|BF|}{a} = \frac{|AB|}{16}$$

Zatem

$$|AF| = \frac{|AB| \cdot a}{12} \text{ oraz } |BF| = \frac{|AB| \cdot a}{16}$$

Wobec tego

$$|AB| = |AF| + |BF| = \frac{|AB| \cdot a}{12} + \frac{|AB| \cdot a}{16}$$

Zatem

$$1 = \frac{a}{12} + \frac{a}{16}$$

Wynika stąd, że $a = \frac{48}{7}$.

Długość boku rombu $EFGH$ jest równa $\frac{48}{7}$.

Sposób II

Niech a oznacza długość boku rombu.
Z warunków zadania mamy $|OD| = 6$, $|OC| = 8$.

Punkt K jest punktem przecięcia przekątnej AC równoległoboku z bokiem GH rombu.
Punkt L jest punktem przecięcia przekątnej BD równoległoboku z bokiem EH rombu.

Trójkąty HKC i DOC są podobne oraz trójkąty GKC i BOC są podobne (na mocy cechy *kkk* podobieństwa trójkątów), zatem

$$\frac{|KH|}{|OD|} = \frac{|KC|}{|OC|} \text{ oraz } \frac{|KG|}{|OB|} = \frac{|KC|}{|OC|}$$

Stąd

$$\frac{|KH|}{6} = \frac{|KG|}{6}$$

Zatem $|KH| = |KG| = \frac{a}{2}$.

Analogicznie $|LH| = |LE| = \frac{a}{2}$.

Ponieważ boki czworokąta $LOKH$ są równoległe do boków rombu $EFGH$, więc $LOKH$ również jest rombem i każdy z jego boków ma długość $\frac{a}{2}$.

Możemy zatem obliczyć długość odcinka $|KC| = |OC| - |OK| = 8 - \frac{a}{2}$.

Korzystając ponownie z podobieństwa trójkątów HKC i DOC, mamy

$$\frac{|KH|}{|OD|} = \frac{|KC|}{|OC|}$$

$$\frac{\frac{a}{2}}{6} = \frac{8 - \frac{a}{2}}{8}$$

Stąd

$$a = \frac{48}{7}$$

Długość boku rombu $EFGH$ jest równa $\frac{48}{7}$.

Zadanie 24. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; VII.3) stosuje […] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$. VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków […].

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie pola trójkąta ABC i zapisanie poprawnego wyniku: $P = \frac{18}{5}$.

1 pkt – obliczenie sinusa kąta α: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

ALBO

obliczenie długości wysokości trójkąta ABC: $h = \frac{12}{5}$,

ALBO

obliczenie kwadratu długości boku BC: $|BC|^2 = \frac{29}{5}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Z warunków zadania mamy: $|AC| = 4$, $|AB| = 3$.

Oznaczmy przez α miarę kąta BAC. Wtedy $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Aby obliczyć pole P trójkąta ABC, zastosujemy wzór

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha$$

Korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obliczamy sinus kąta α:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Zatem

$$P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$$

Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{18}{5}$.

Sposób II

Z warunków zadania mamy: $|AC| = 4$, $|AB| = 3$.

Niech h oznacza wysokość CD trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C, natomiast α – miarę kąta BAC.

Wtedy $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Aby obliczyć pole P trójkąta ABC, zastosujemy wzór

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD|$$

W tym celu najpierw obliczamy długość odcinka AD:

$$\cos\alpha = \frac{|AD|}{|AC|}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{|AD|}{4}$$

$$|AD| = \frac{16}{5}$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC, obliczamy wysokość $h = |CD|$:

$$|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$$

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 + h^2 = 4^2$$

$$h^2 = 16 - \frac{256}{25}$$

$$h^2 = \frac{144}{25}$$

$$h = \frac{12}{5}$$

Obliczamy pole trójkąta ABC:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$$

Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{18}{5}$.

Sposób III

Z warunków zadania mamy: $|AC| = 4$, $|AB| = 3$.

Z twierdzenia cosinusów mamy:

$$|BC|^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{29}{5}$$

$$|BC| = \sqrt{\frac{29}{5}} = \frac{\sqrt{145}}{5}$$

Obwód O_{ABC} trójkąta ABC jest równy

$$O_{ABC} = 4 + 3 + \frac{\sqrt{145}}{5} = \frac{35 + \sqrt{145}}{5}$$

Stosując wzór Herona, obliczamy pole P trójkąta ABC:

$$P = \sqrt{\frac{35 + \sqrt{145}}{10} \cdot \frac{35 - \sqrt{145}}{10} \cdot \frac{\sqrt{145} - 5}{10} \cdot \frac{\sqrt{145} + 5}{10}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1225 - 145}{100} \cdot \frac{145 - 25}{100}} = \sqrt{\frac{1080}{100} \cdot \frac{120}{100}} = \frac{360}{100} = \frac{18}{5}$$

Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{18}{5}$.

Sposób IV

Z warunków zadania mamy: $|AC| = 4$, $|AB| = 3$.
Niech D będzie punktem przecięcia prostej AB z prostą prostopadłą do prostej AC przechodzącą przez punkt C.

Wtedy trójkąt ADC jest prostokątny, a ponieważ $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ oraz $|AC| = 4$, więc jest to trójkąt egipski. Zatem $|AD| = 5$ oraz $|CD| = 3$.

Pole trójkąta ADC jest równe

$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

Trójkąty ABC i ADC mają wspólną wysokość h poprowadzoną z wierzchołka C. Możemy ją wyznaczyć ze wzoru na pole trójkąta ADC:

$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h = 6$$

Stąd $h = \frac{12}{5}$.

Obliczamy pole trójkąta ABC:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$$

Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{18}{5}$.

Zadanie 25.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 25.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 26. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w […] trapezach; VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami […] figur podobnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 27. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 28. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 29. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość […] do innej prostej […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 30.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni […]; X.4) oblicza objętości […] ostrosłupów […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 30.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną. VII.1) wykorzystuje definicje funkcji sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° […].

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie wartości cosinusa kąta α: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1 pkt – obliczenie długości odcinka AO: $|AO| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Punkt O jest spodkiem wysokości ostrosłupa $ABCDW$. Zatem wysokość ostrosłupa jest równa $|OW| = 9$.

Odcinek AC jest przekątną kwadratu o boku 9, zatem jego długość jest równa $9\sqrt{2}$.

Odcinek AO stanowi jego połowę, więc $|AO| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOW mamy:

$$|AO|^2 + |OW|^2 = |AW|^2$$

Podstawiamy długości odcinków:

$$\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 9^2 = |AW|^2$$

$$|AW|^2 = 9^2\left(\frac{2}{4} + 1\right)$$

$$|AW| = \frac{9\sqrt{6}}{2}$$

Oznaczamy kąt WAO przez α. Obliczamy cosinus kąta α:

$$\cos\alpha = \frac{|AO|}{|AW|} = \frac{\frac{9\sqrt{2}}{2}}{\frac{9\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sposób II

Punkt O jest spodkiem wysokości ostrosłupa $ABCDW$. Zatem wysokość ostrosłupa jest równa $|OW| = 9$.

Odcinek AC jest przekątną kwadratu o boku 9, zatem jego długość jest równa $9\sqrt{2}$.

Odcinek AO stanowi jego połowę, więc $|AO| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Oznaczamy kąt WAO przez α.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|OW|}{|AO|} = \frac{9}{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznej $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, mamy

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{2}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha$$

Stąd z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ mamy

$$2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$3\cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$$

Ponieważ kąt α jest ostry, więc

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Zadanie 31. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.5) wykorzystuje zależność między objętościami graniastosłupów […] podobnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 32. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 33. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną […]; XII.3) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych.

Zasady oceniania
2 pkt – wyznaczenie końców przedziału wyznaczonego przez jedno odchylenie standardowe od średniej oraz zapisanie numerów donic, w których liczby wykiełkowanych nasion mieszczą się w tym przedziale: 126, 154, I, II, IV.
1 pkt – poprawna metoda obliczenia średniej liczby wykiełkowanych nasion i obliczenie tej średniej: $\bar{x} = 140$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Na podstawie wyników eksperymentu obliczamy średnią liczbę wykiełkowanych nasion:

$$\bar{x} = \frac{133 + 140 + 119 + 147 + 161}{5} = \frac{700}{5} = 140$$

Ponieważ odchylenie standardowe w tym doświadczeniu jest równe $\sigma = 14$, więc przedział określony przez to odchylenie standardowe od średniej będzie równy

$$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) = (126, 154)$$

Numery donic, w których liczby wykiełkowanych nasion mieszczą się w tym przedziale, to: I, II oraz IV.