

**WYPEŁNIA ZDAJĄCY**

**KOD**

--	--	--

**PESEL**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Miejsce na naklejkę.**

Sprawdź, czy kod na naklejce to  
**M-100.**

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.  
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

**EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI**  
**POZIOM ROZSZERZONY**

**ARKUSZ POKAZOWY**

TERMIN: **4 marca 2022 r.**

CZAS PRACY: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

**WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY**

Uprawnienia zdającego do:

- dostosowania zasad oceniania
- dostosowania w zw. z dyskalkulią
- nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

MMAP-R0-**100**-2203

**Instrukcja dla zdającego**

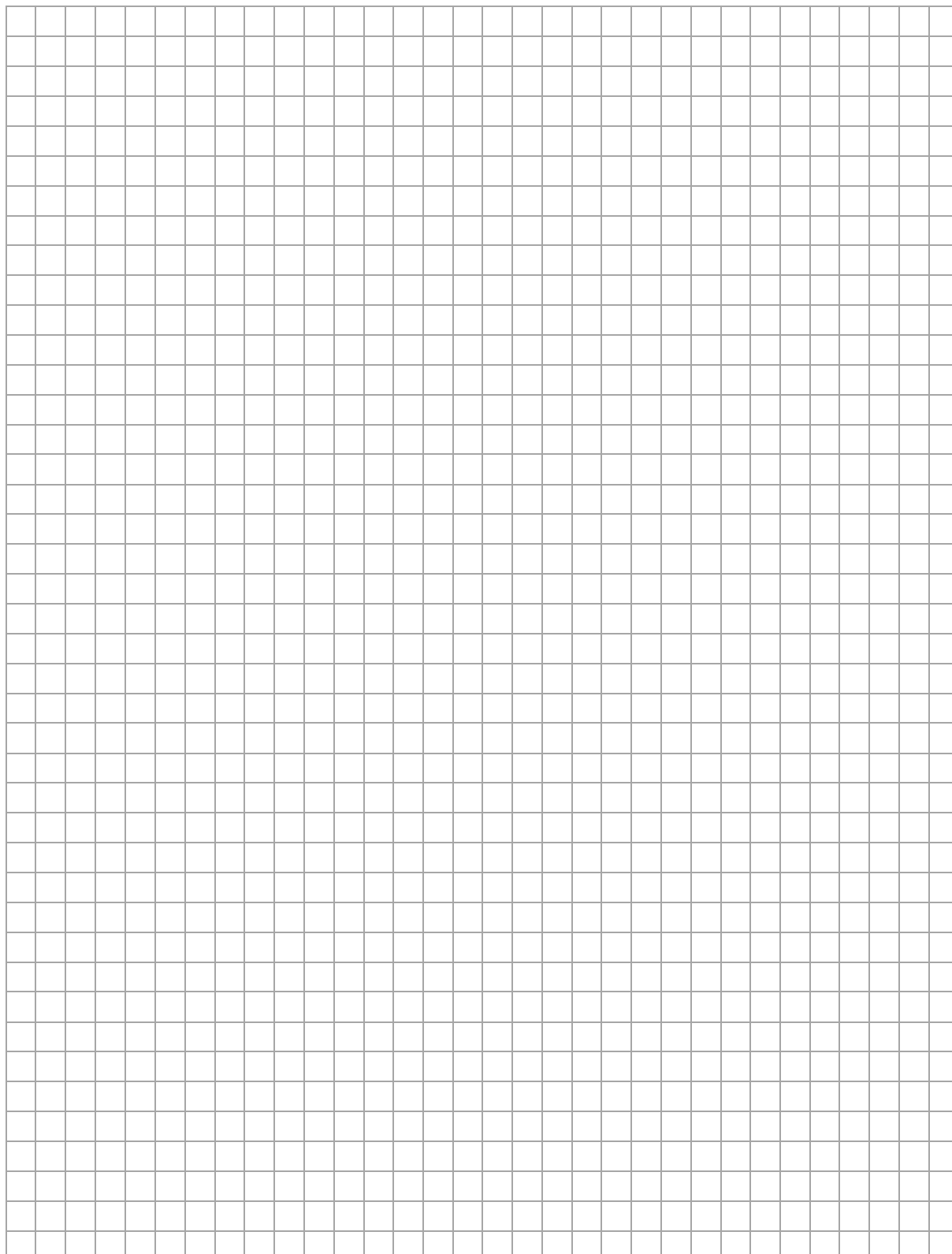
1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 32 strony (zadania 1–11).  
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

**Zadanie 1. (0–3)**

Dane są liczby  $a = \log_2 3$  oraz  $b = \log_3 7$ .

Wyraź  $\log_4 49$  za pomocą liczb  $a$  oraz  $b$ .

Zapisz obliczenia.

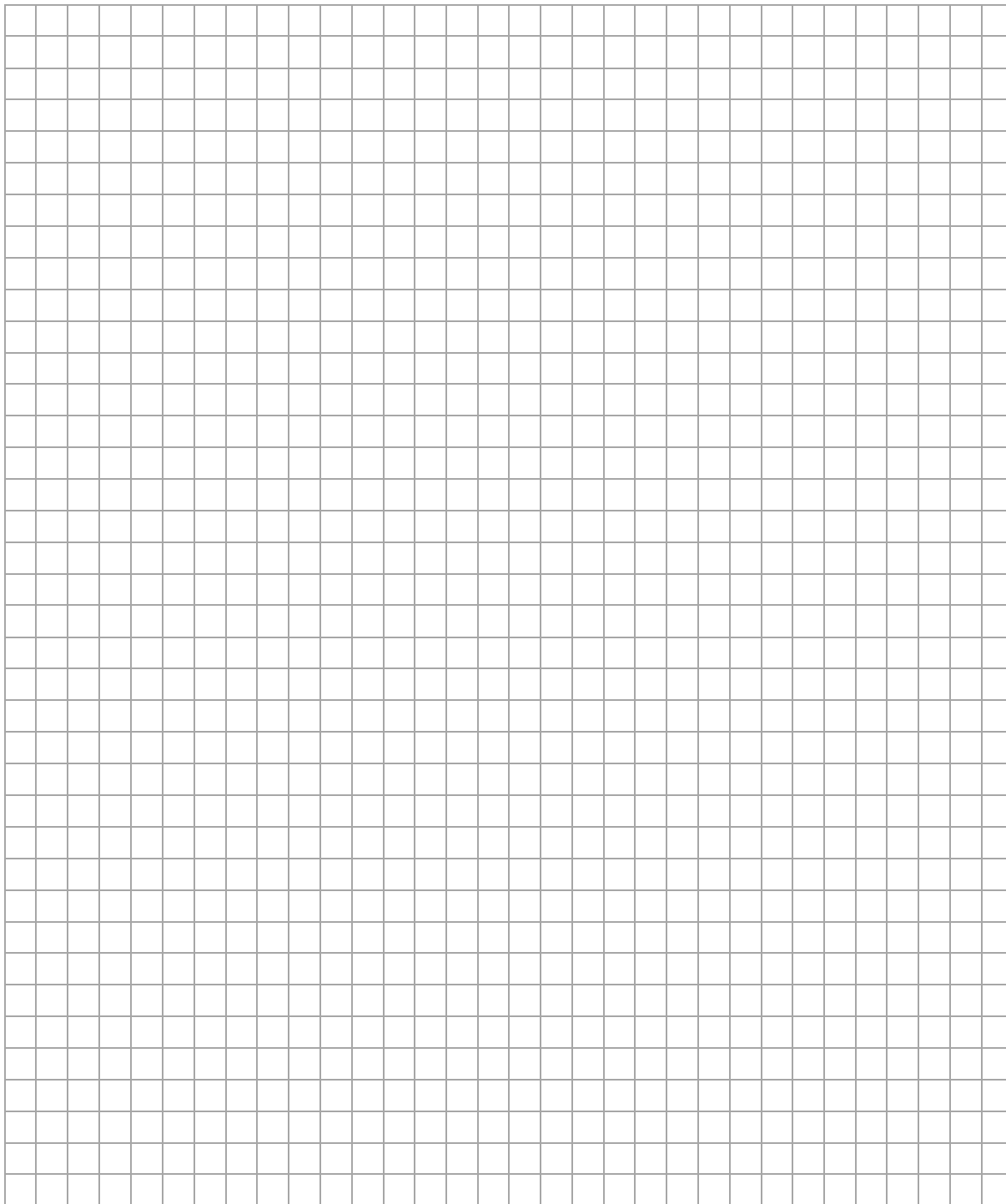


**Zadanie 2. (0–3)**

Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x \neq 1$ .

Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie  $P = (-3, -3)$ .

Zapisz obliczenia.



<b>Wypełnia egzaminator</b>	<b>Nr zadania</b>	<b>1.</b>	<b>2.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>3</b>	<b>3</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>		

**Zadanie 3. (0–4)**

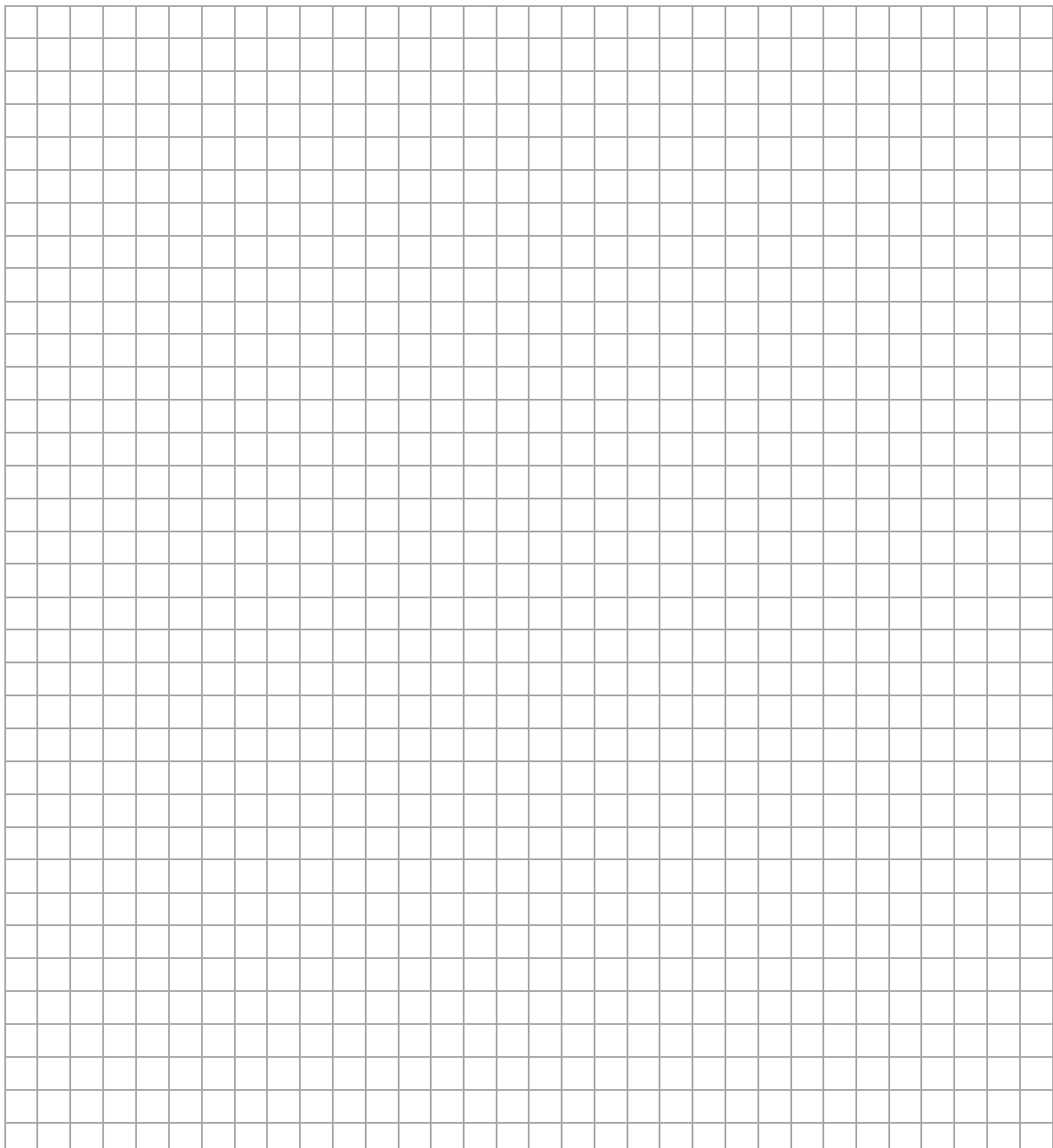
Dany jest nieskończony ciąg geometryczny  $(a_n)$ , określony dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ . Suma trzech początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$  jest równa 7, a suma  $S$  wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 8.

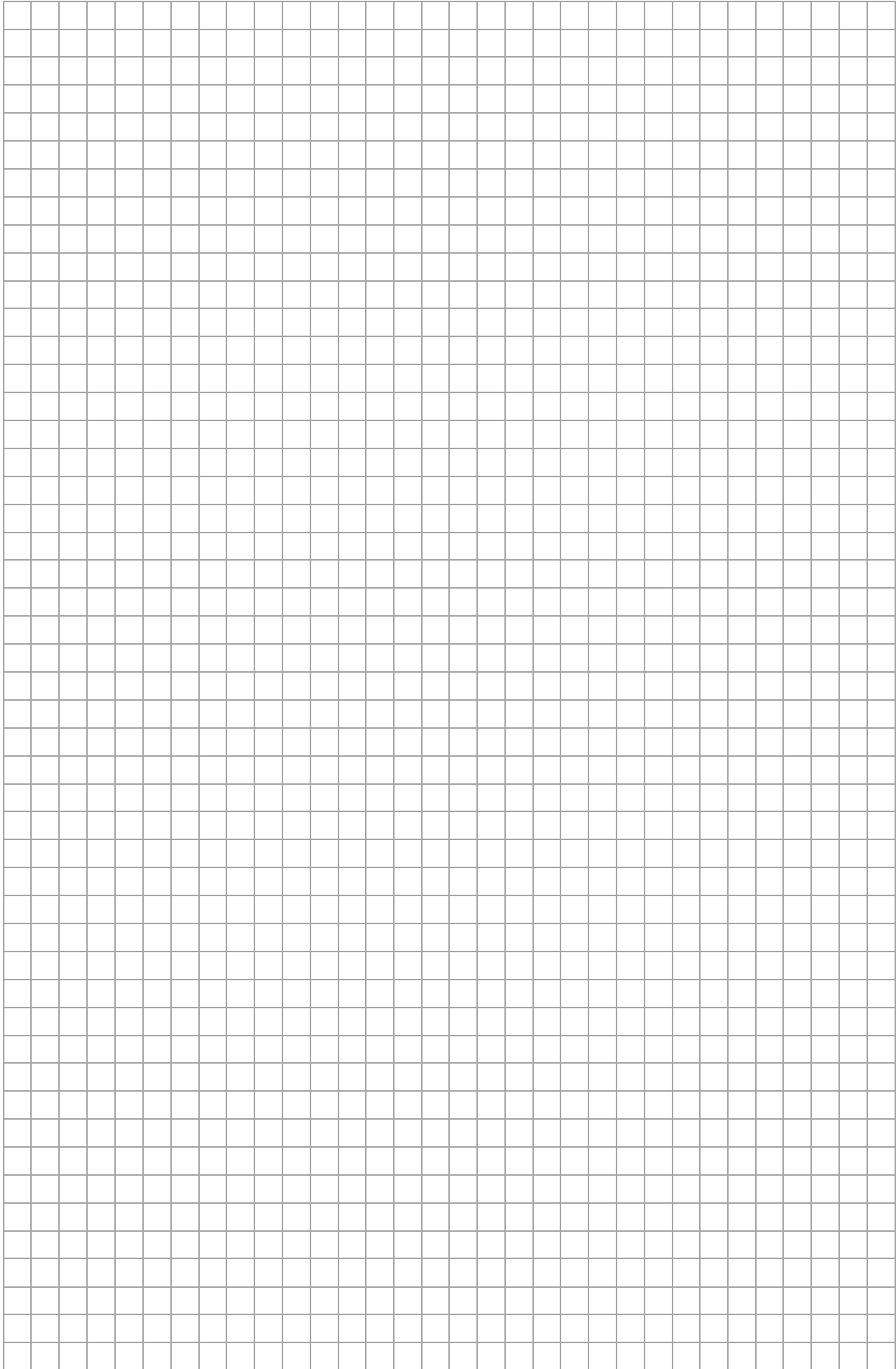
**Wyznacz wszystkie wartości  $n$ , dla których spełniona jest nierówność**

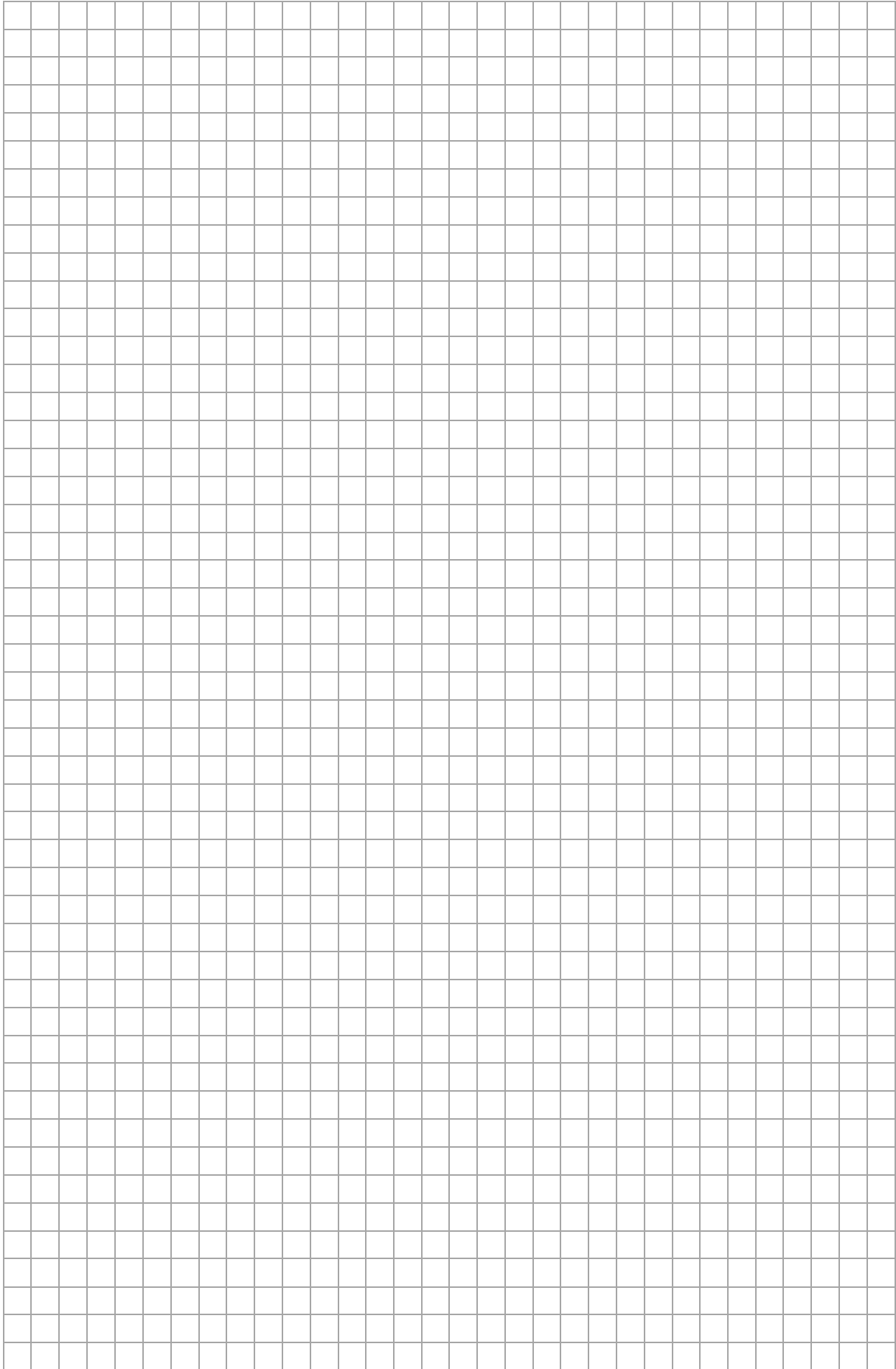
$$\left| \frac{S - S_n}{S_n} \right| < 0,001$$

gdzie  $S_n$  oznacza sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ .

**Zapisz obliczenia.**



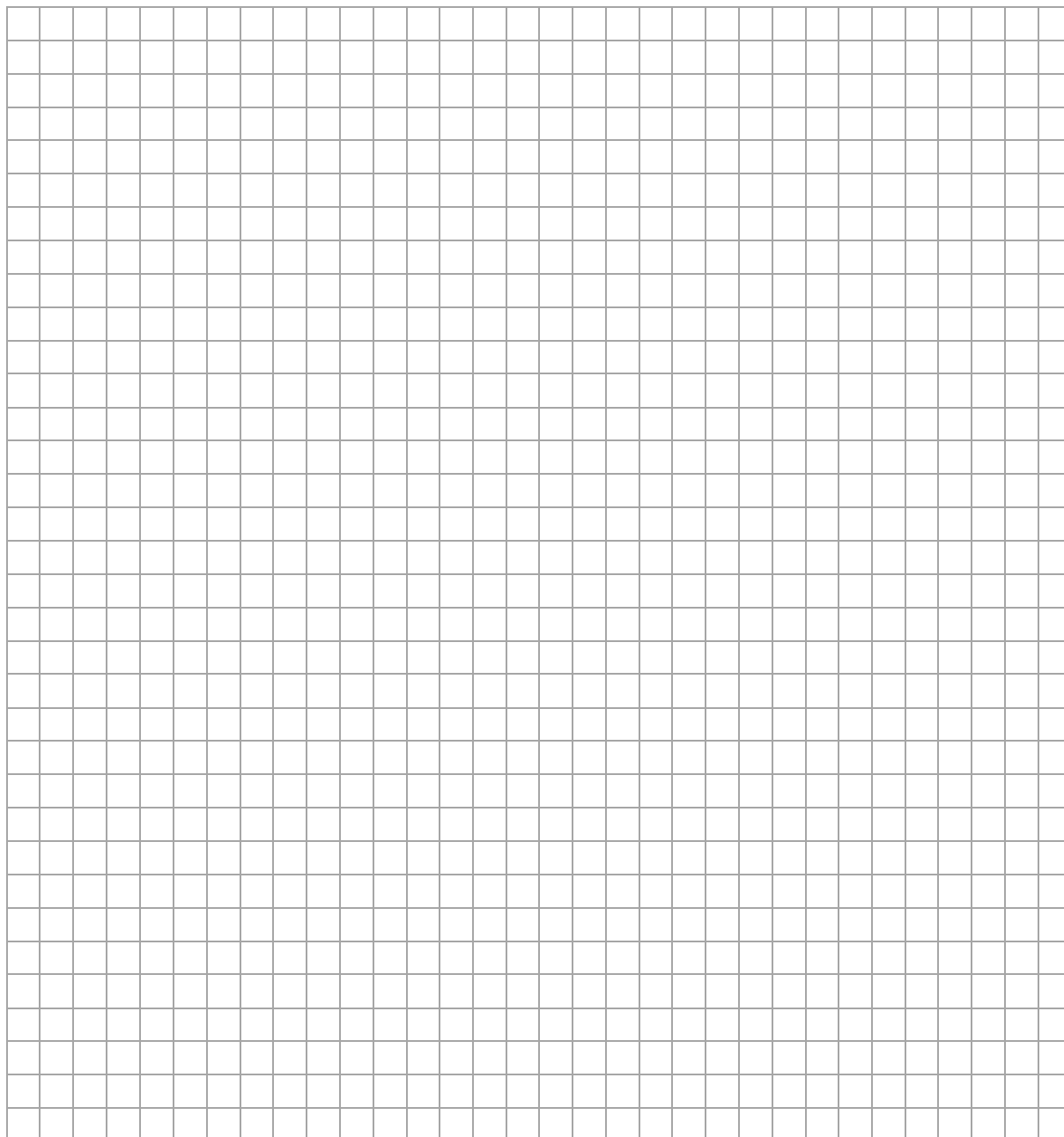




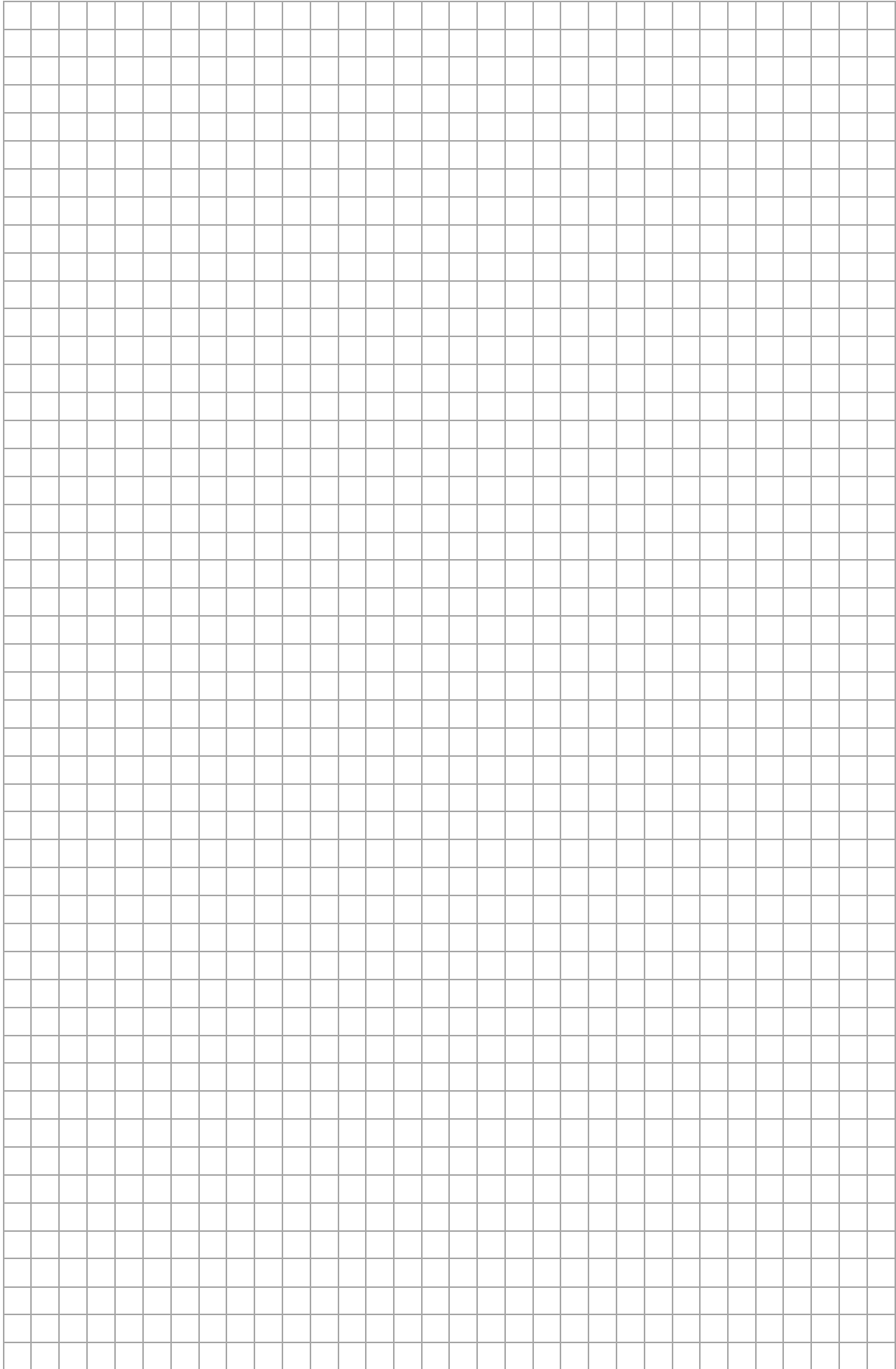
**Zadanie 4. (0–5)**

Dane jest równanie

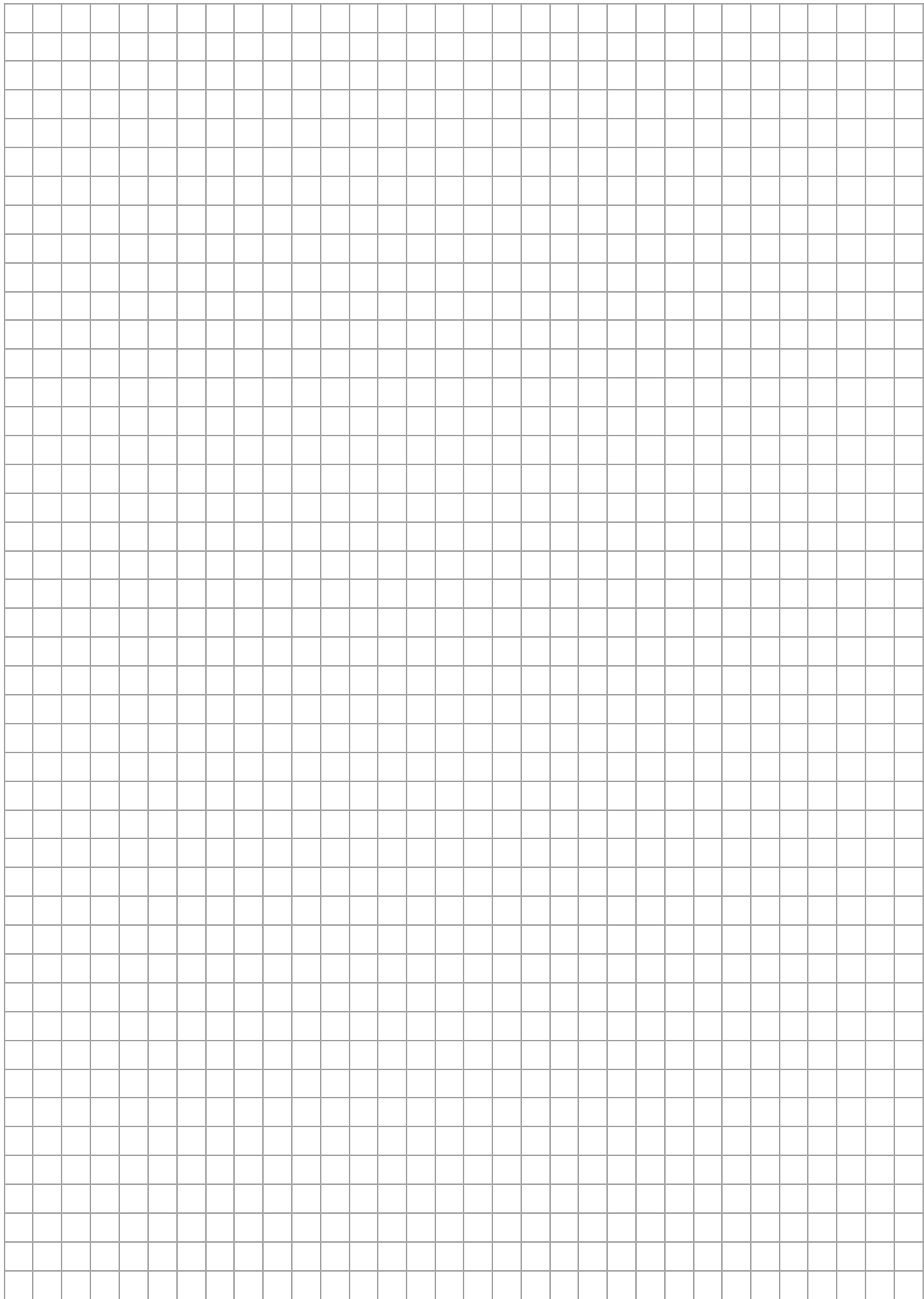
$$(x - 6) \cdot [(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1] = 0$$

z niewiadomą  $x$  i parametrem  $m \in \mathbb{R}$ .**Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku.****Zapisz obliczenia.**

<b>Wypełnia egzaminator</b>	<b>Nr zadania</b>	<b>3.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>4</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>	



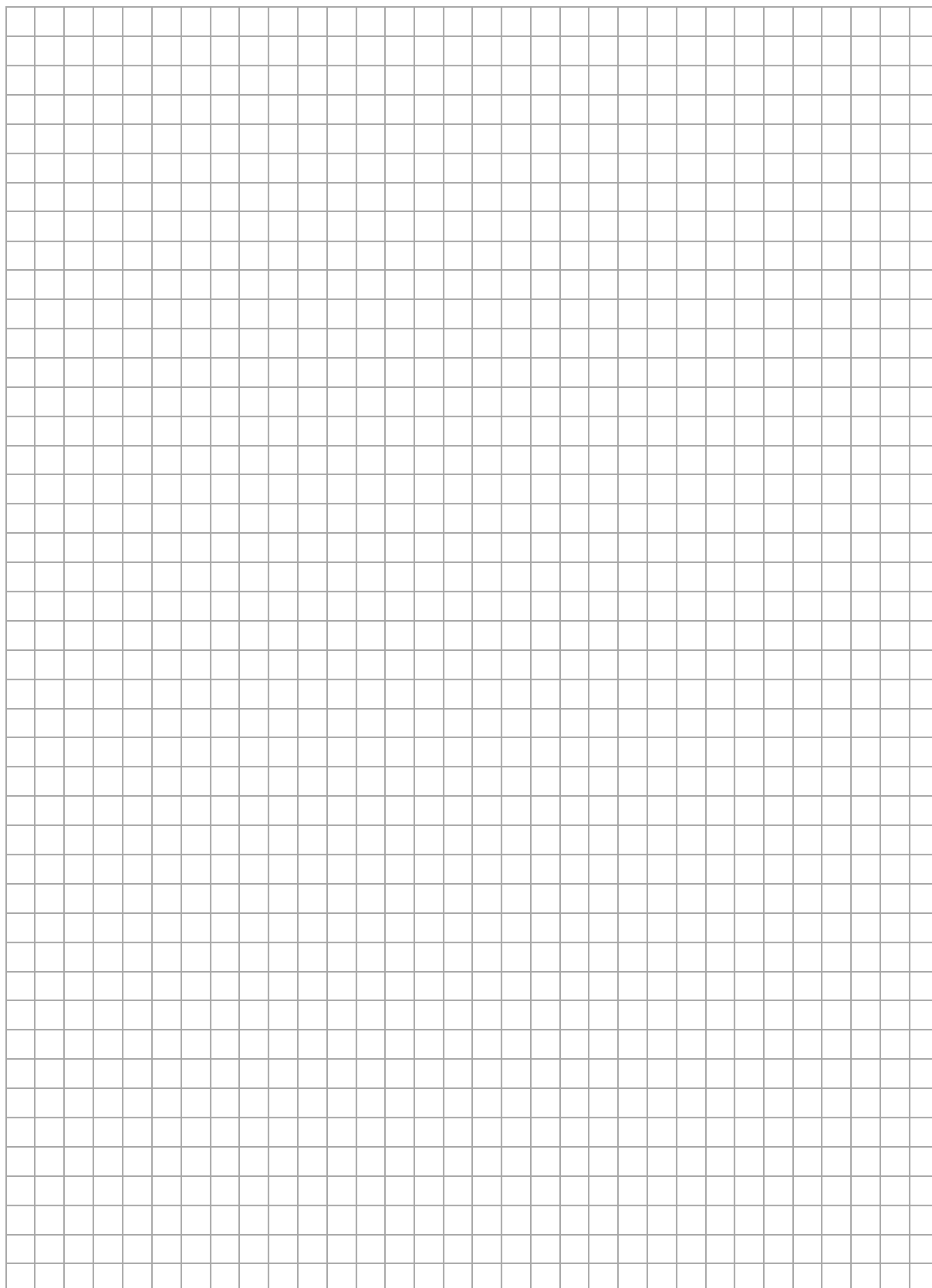


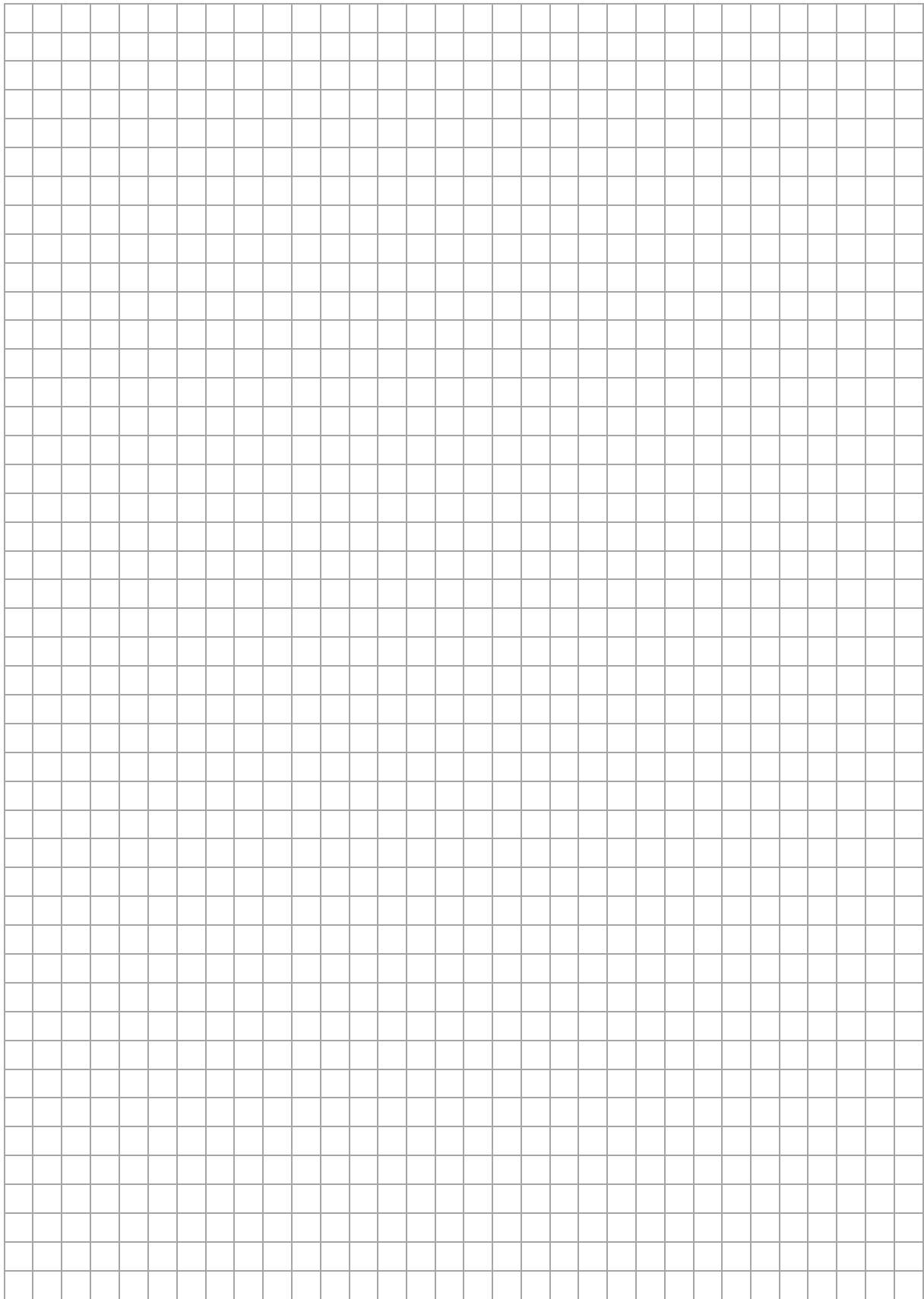


<b>Wypełnia egzaminator</b>	<b>Nr zadania</b>	<b>4.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>5</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>	

**Zadanie 5. (0–3)**

**Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.**





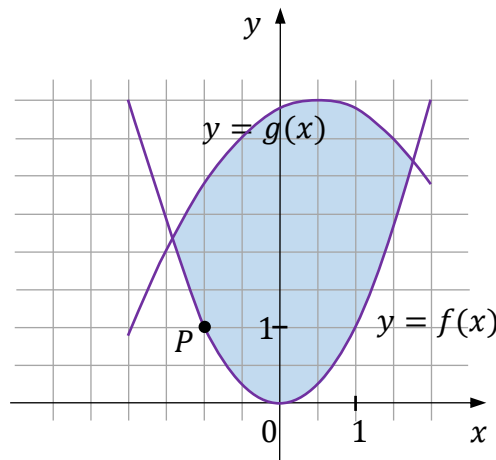
<b>Wypełnia egzaminator</b>	<b>Nr zadania</b>	<b>5.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>3</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>	

### Zadanie 6.

Na obrzeżach miasta znajduje się jezioro, na którym postanowiono stworzyć tor regatowy. Na podstawie dostępnych map wymodelowano w pewnej skali kształt linii brzegowej jeziora w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  za pomocą fragmentów wykresów funkcji  $f$  oraz  $g$  (zobacz rysunek). Funkcje  $f$  oraz  $g$  są określone wzorami  $f(x) = x^2$  oraz  $g(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$ .



Początek toru postanowiono zlokalizować na brzegu jeziora w miejscu, któremu odpowiada w układzie współrzędnych punkt  $P = (-1, 1)$ .



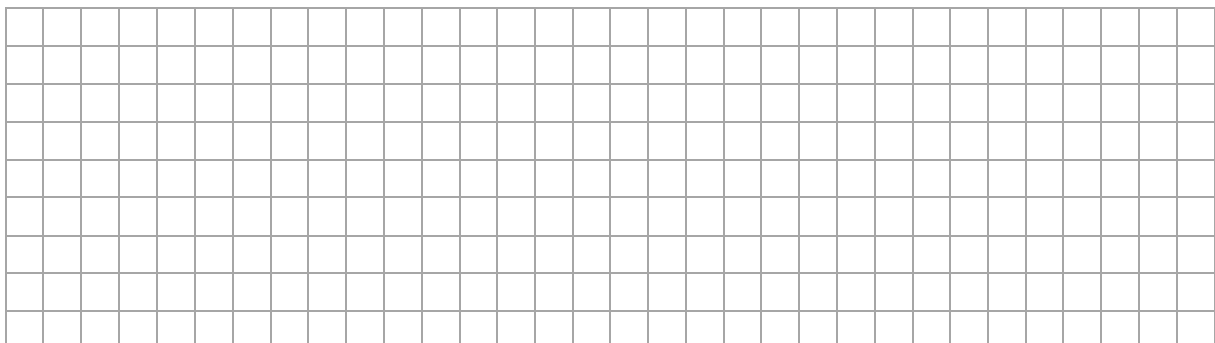
### Zadanie 6.1. (0–2)

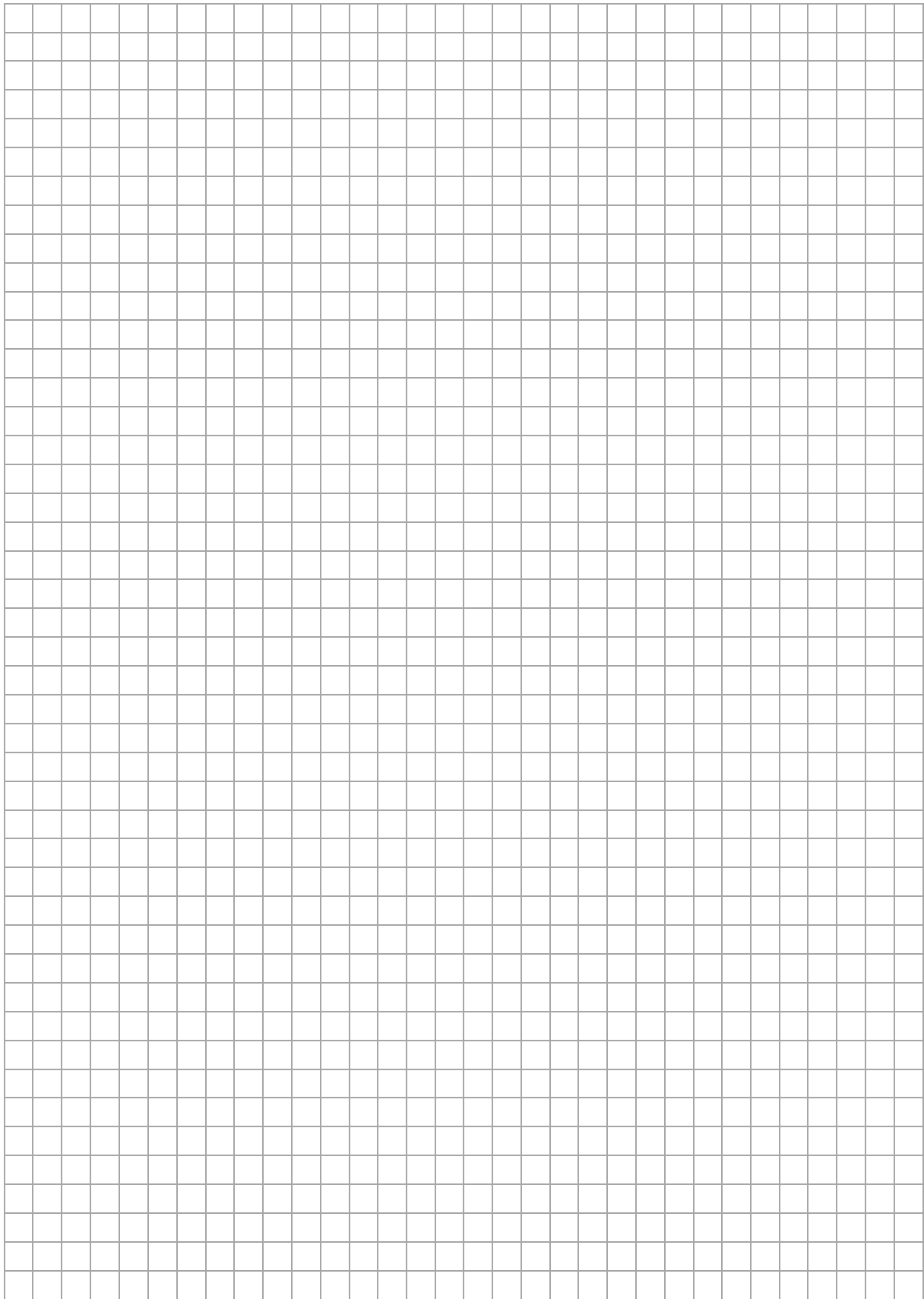
Niech  $R$  będzie punktem leżącym na wykresie funkcji  $g$ .

Wykaż, że odległość punktu  $R$  od punktu  $P$  wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

gdzie  $x$  jest pierwszą współrzędną punktu  $R$ .





<b>Wypełnia egzaminator</b>	<b>Nr zadania</b>	<b>6.1.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>2</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>	

**Zadanie 6.2. (0–6)**

Koniec toru regatowego należy umieścić na linii brzegowej.

**Oblicz współrzędne punktu  $K$ , w którym należy zlokalizować koniec toru, aby długość toru (tj. odległość końca  $K$  toru od początku  $P$ ) była możliwie największa. Oblicz długość najdłuższego toru.**

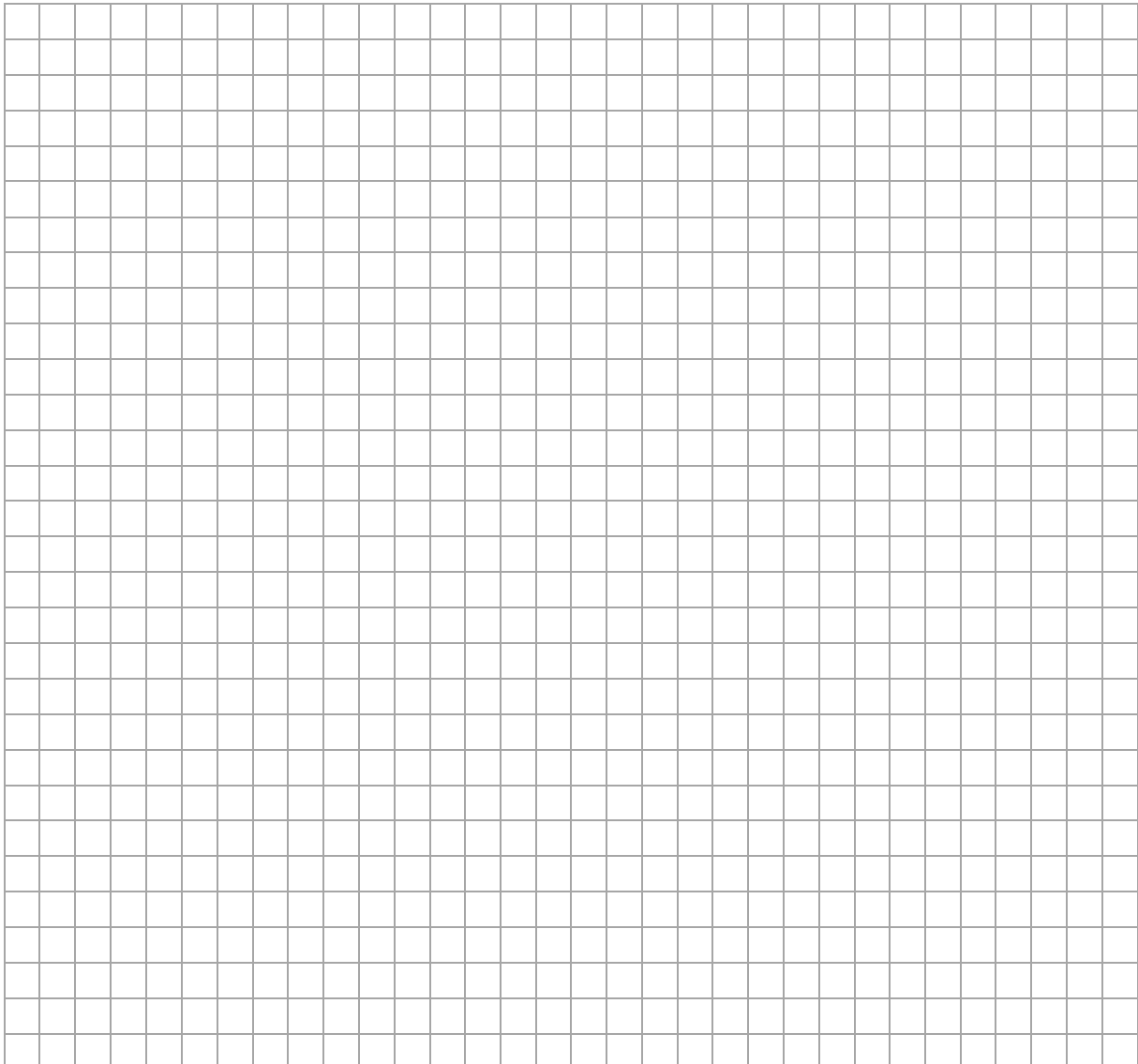
**Zapisz obliczenia.**

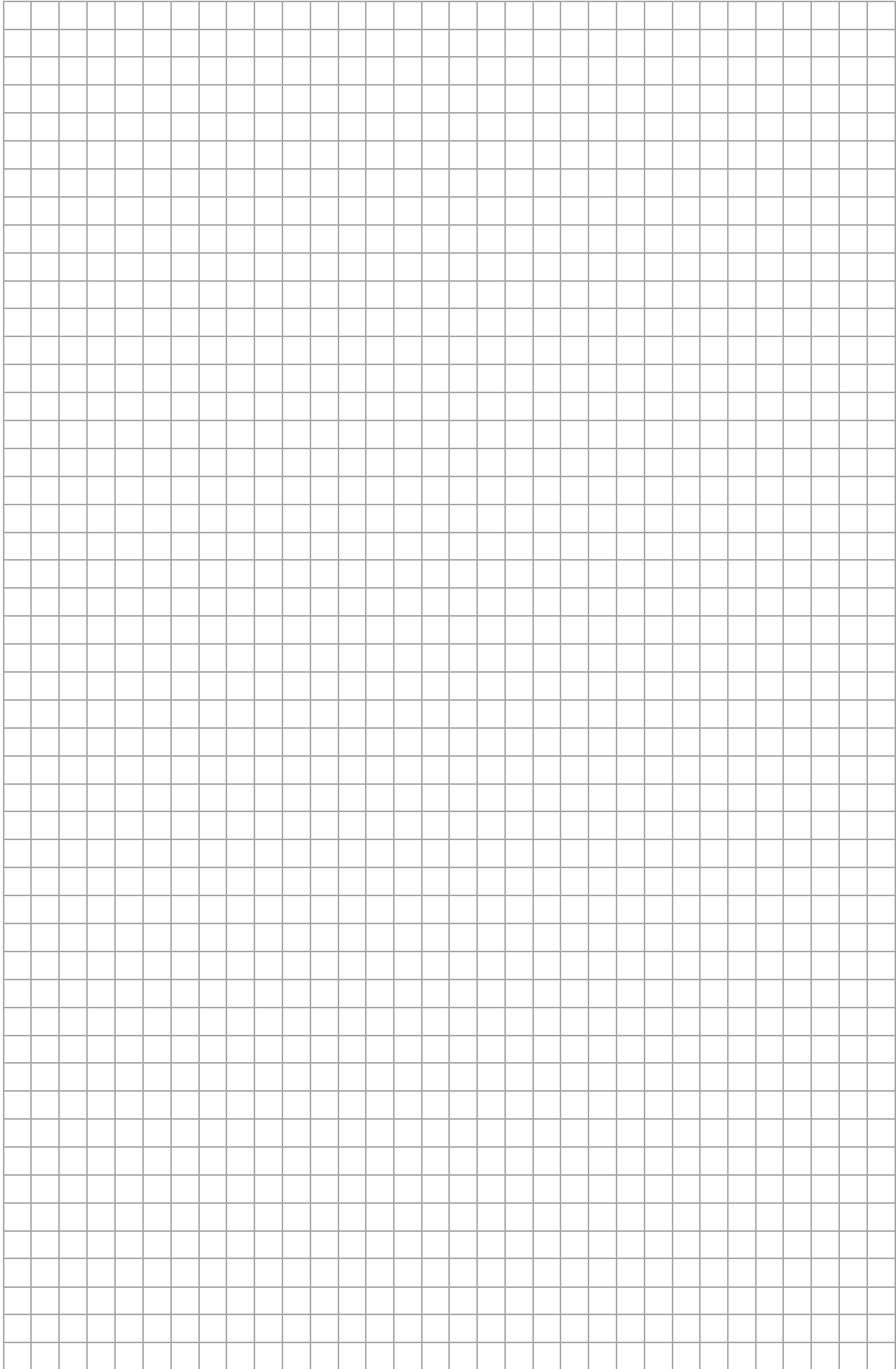
*Wskazówka.*

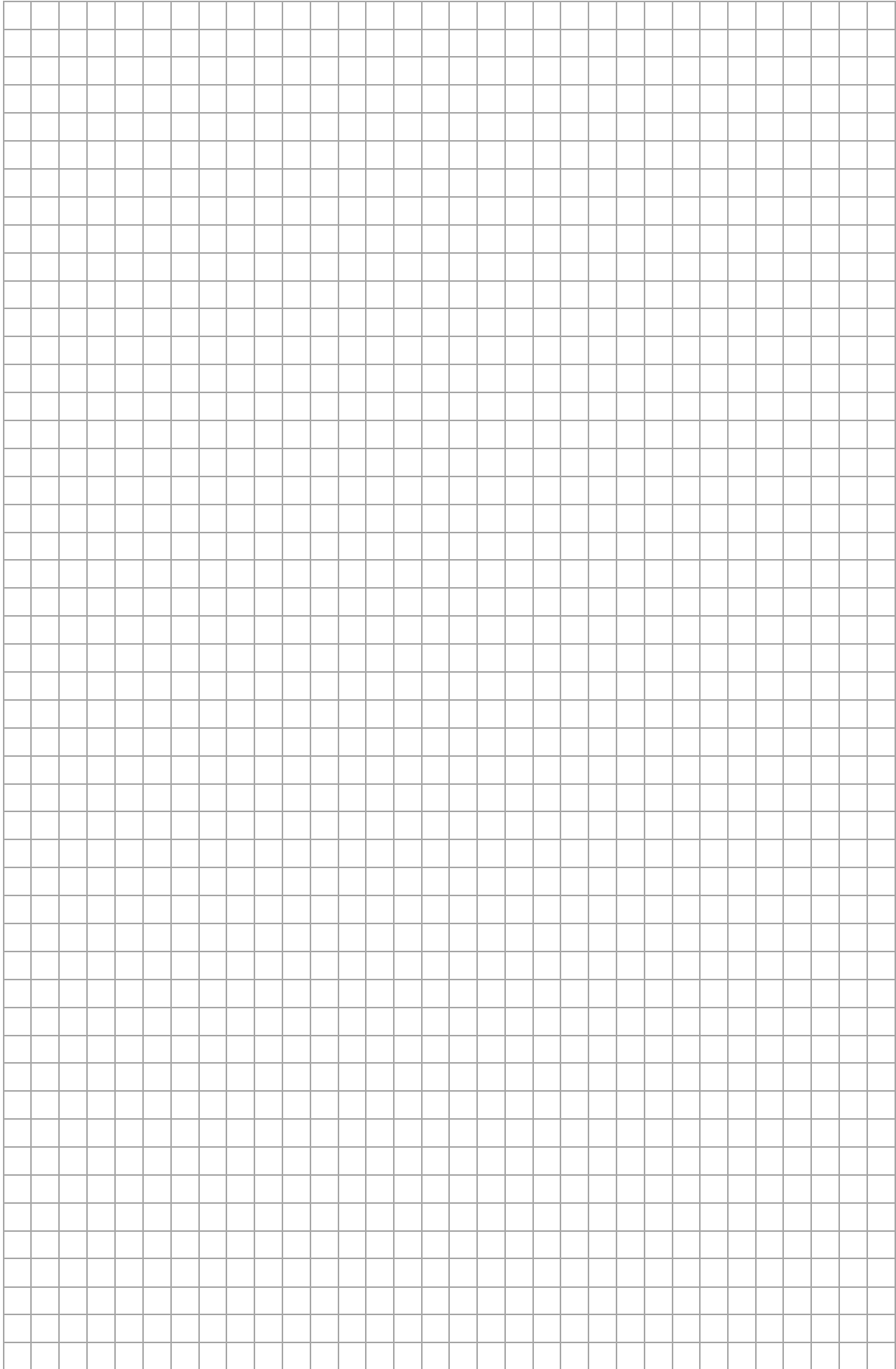
*Przy rozwiązywaniu zadania możesz skorzystać z tego, że odległość dowolnego punktu  $R$  leżącego na wykresie funkcji  $g$  od punktu  $P$  wyraża się wzorem*

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

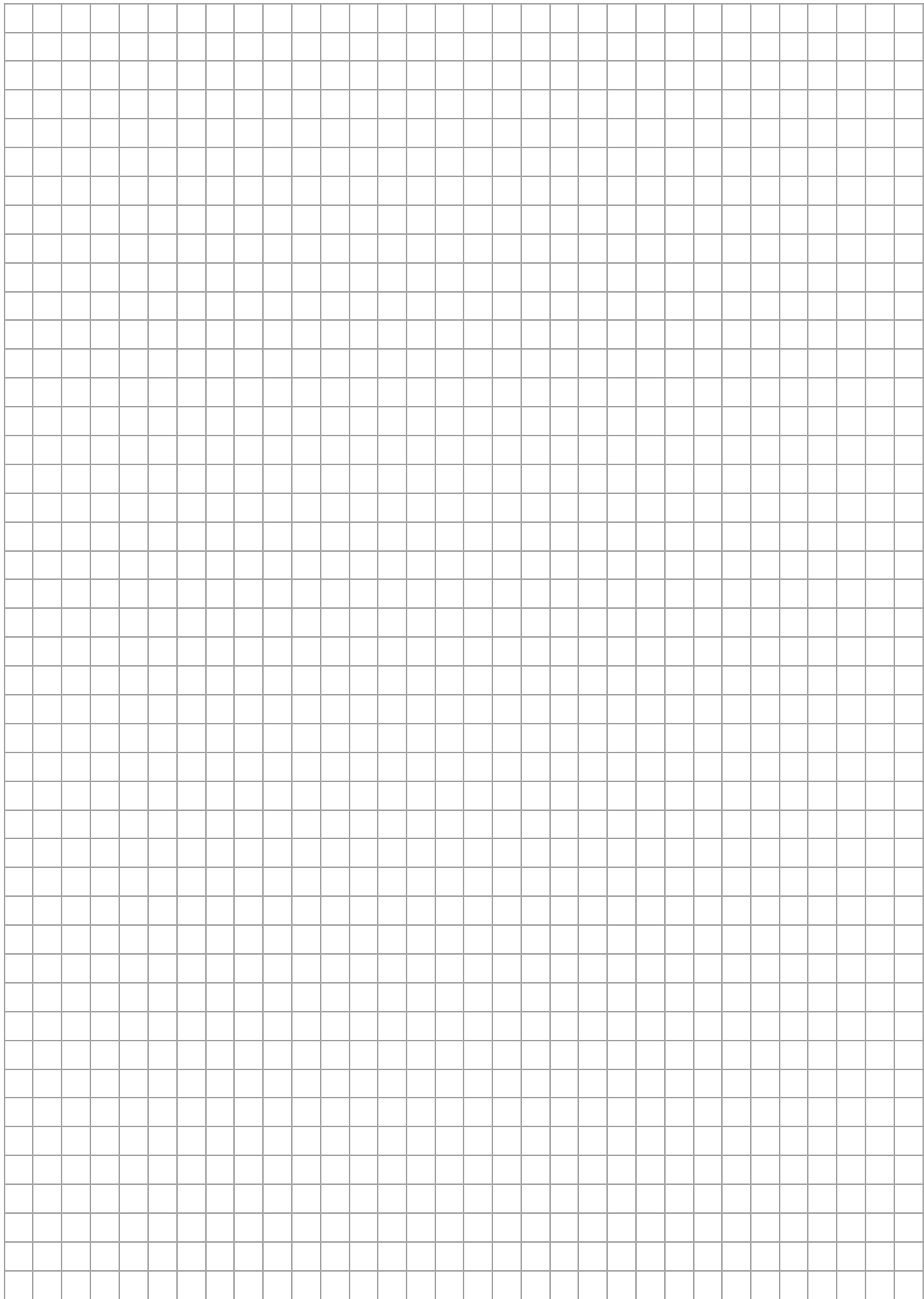
*gdzie  $x$  jest pierwszą współrzędną punktu  $R$ .*











<b>Wypełnia egzaminator</b>	<b>Nr zadania</b>	<b>6.2.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>6</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>	

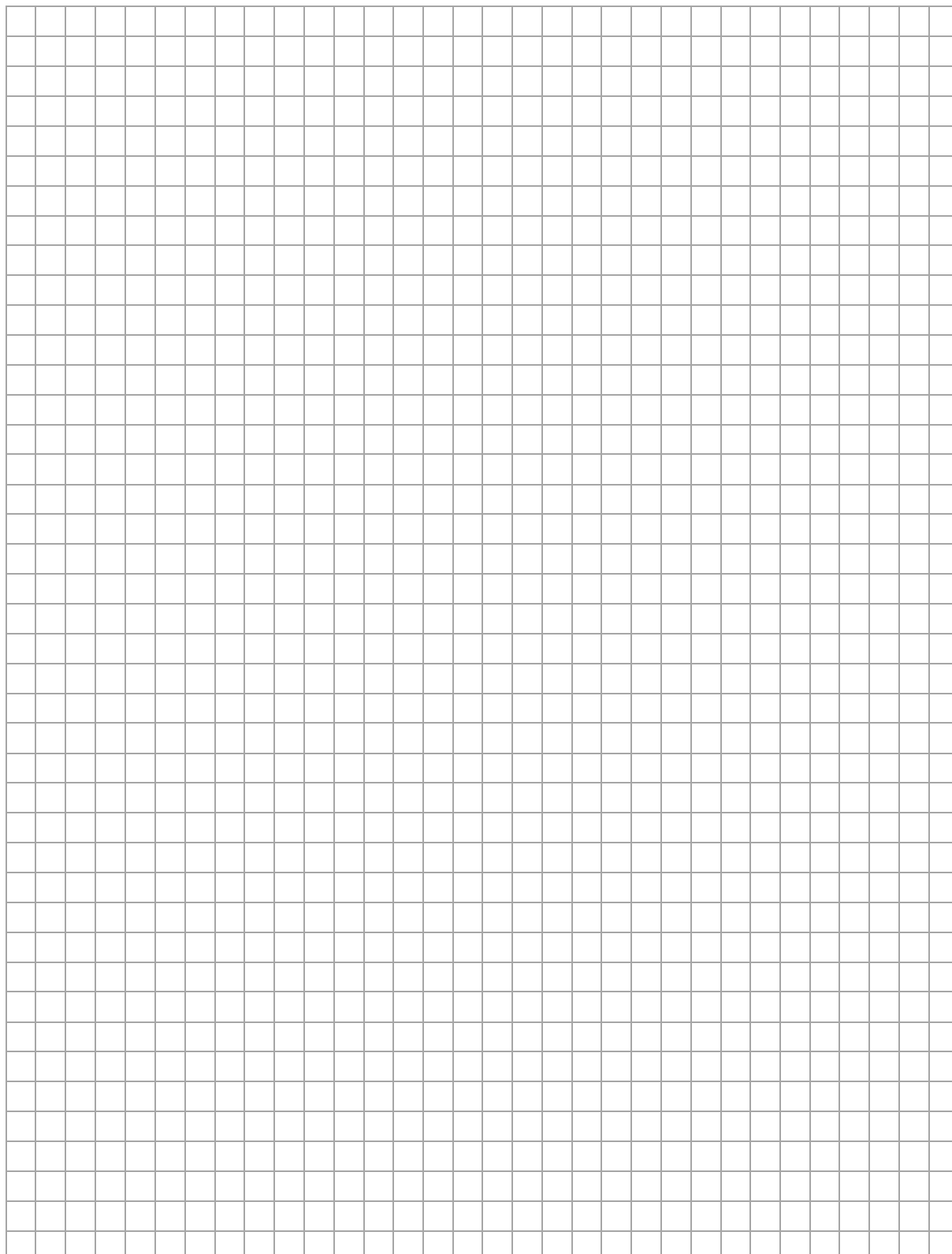
**Zadanie 7. (0–4)**

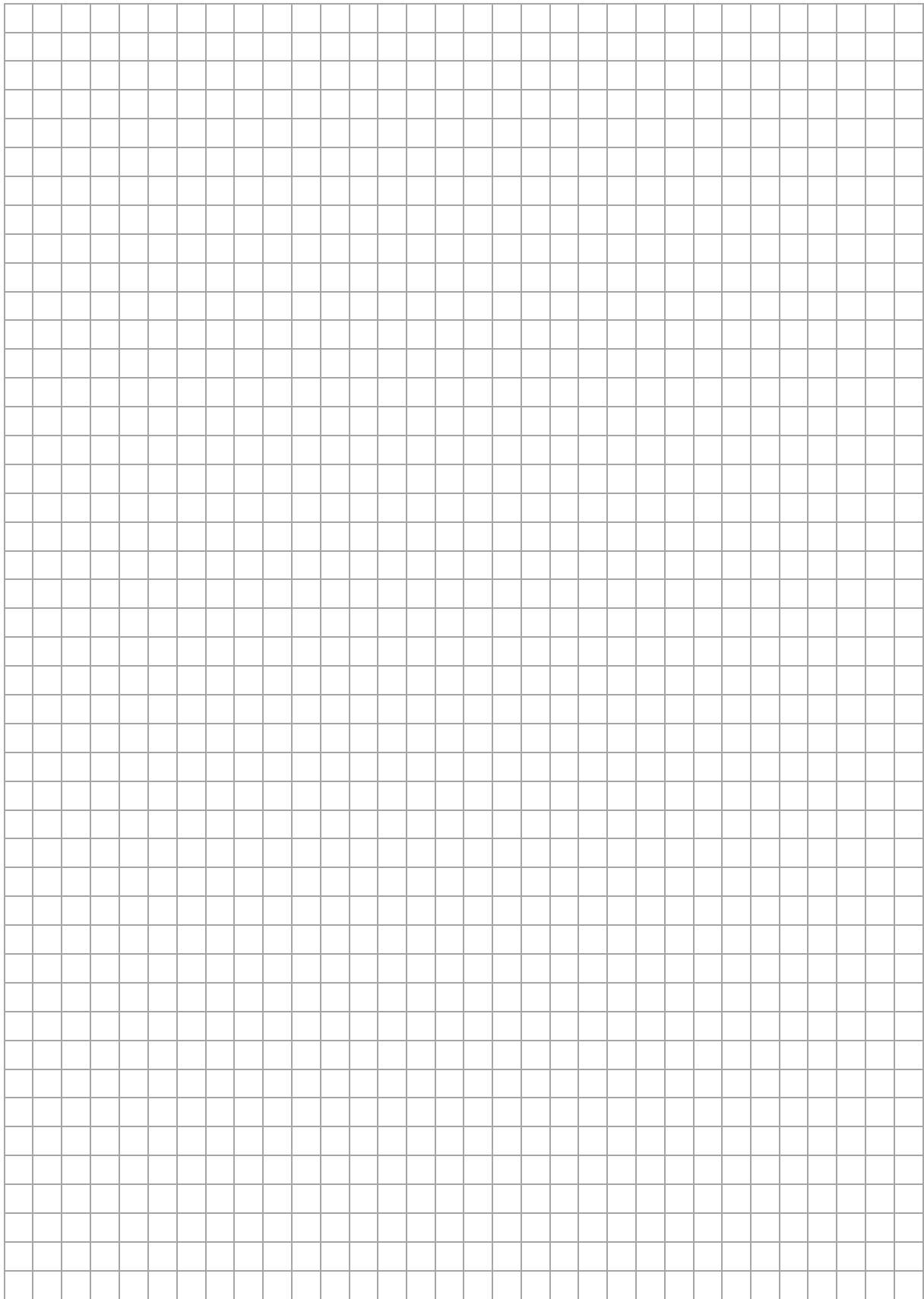
Rozwiąż równanie

$$\sin(3x) = 2 \sin x$$

w zbiorze  $[0, \pi]$ .

Zapisz obliczenia.

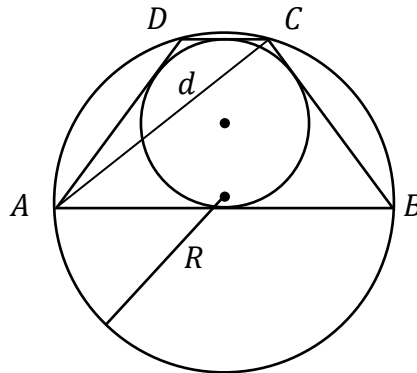




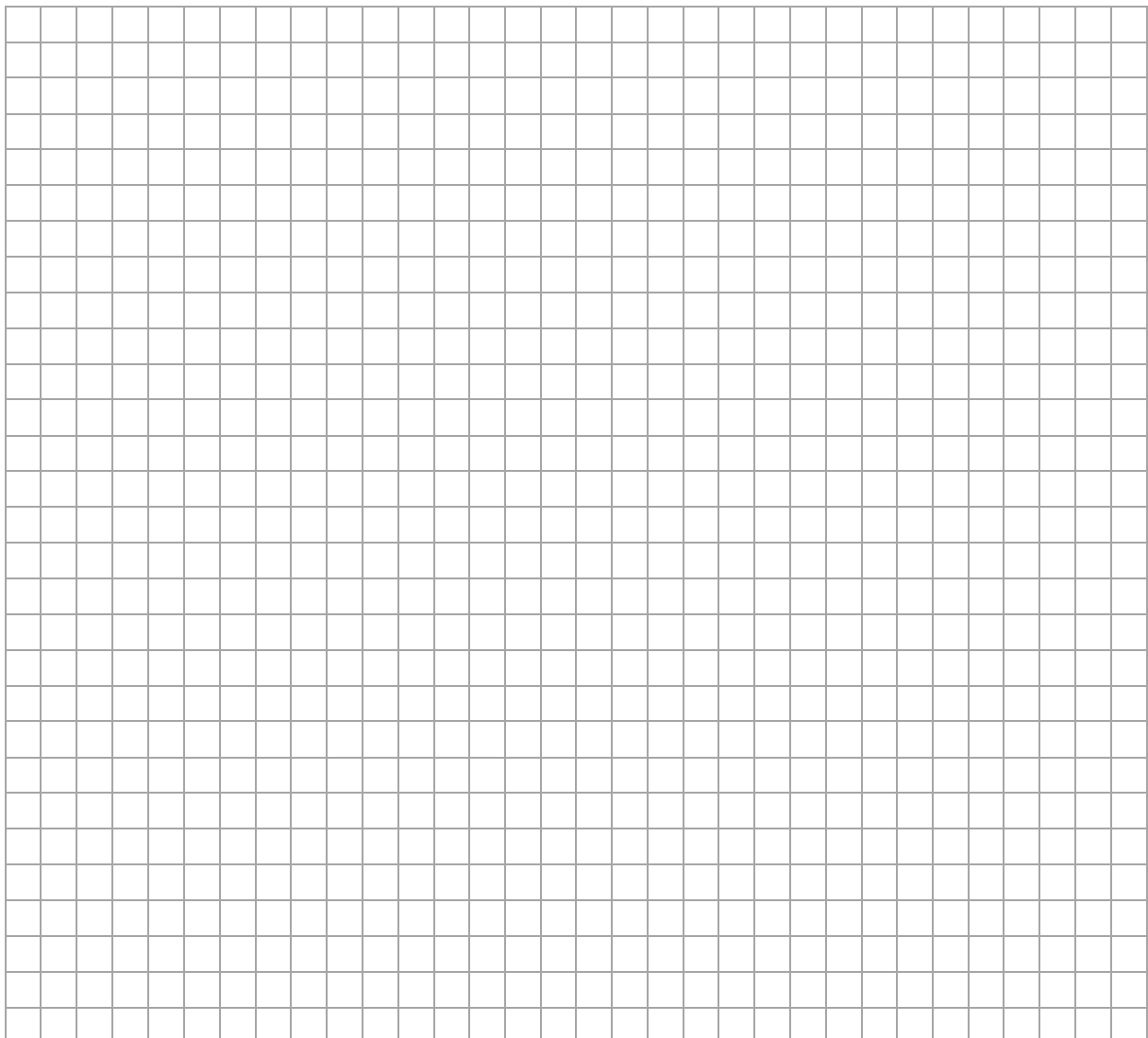
<b>Wypełnia egzaminator</b>	<b>Nr zadania</b>	<b>7.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>4</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>	

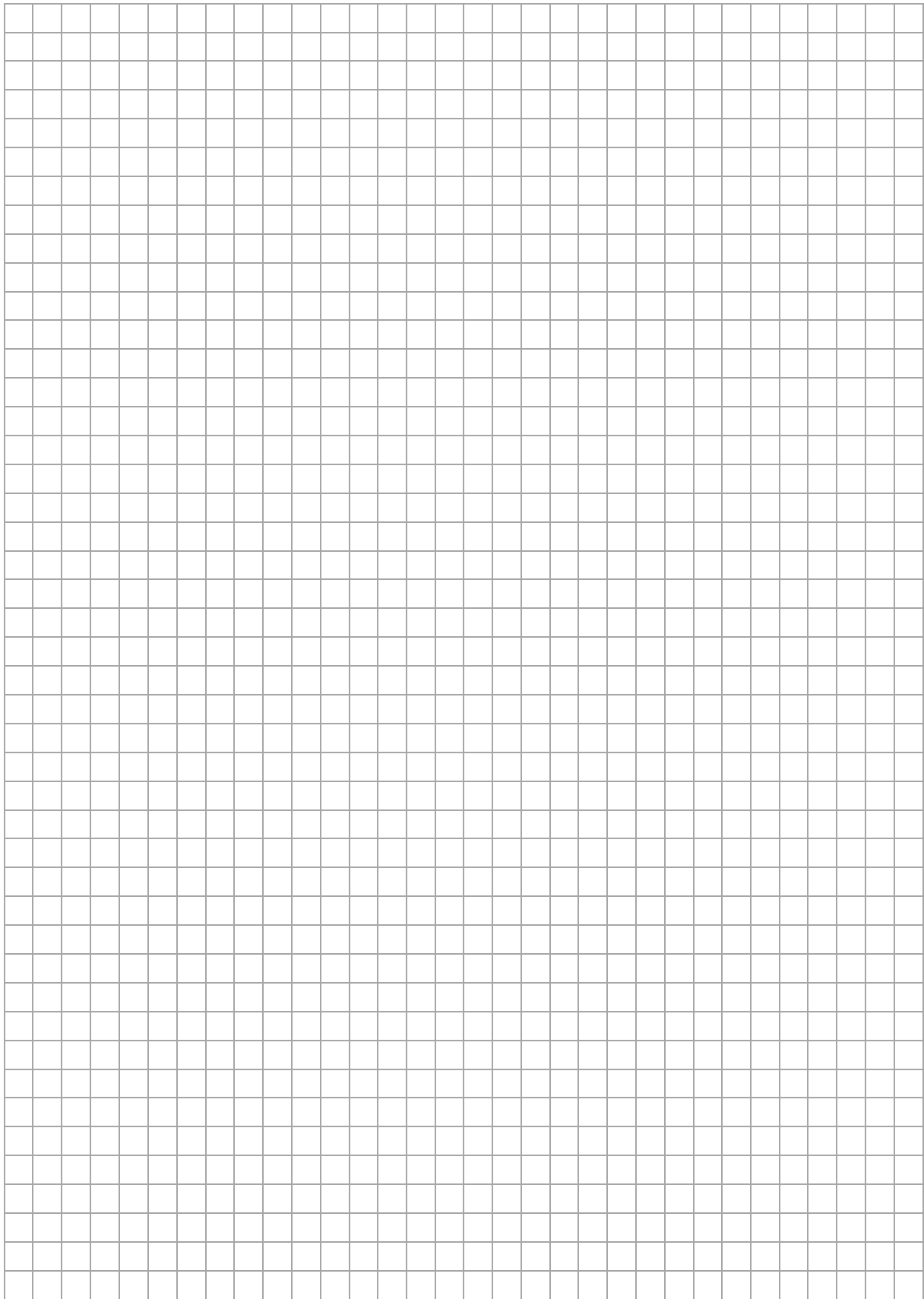
**Zadanie 8. (0–4)**

Dany jest trapez równoramienny  $ABCD$  o obwodzie  $l$  i podstawach  $AB$  oraz  $CD$  takich, że  $|AB| > |CD|$ . Trapez jest opisany na okręgu i wpisany w okrąg, a przekątna  $AC$  trapezu ma długość  $d$  (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień  $R$  okręgu opisanego na trapezie  $ABCD$  jest równy  $\frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$ .





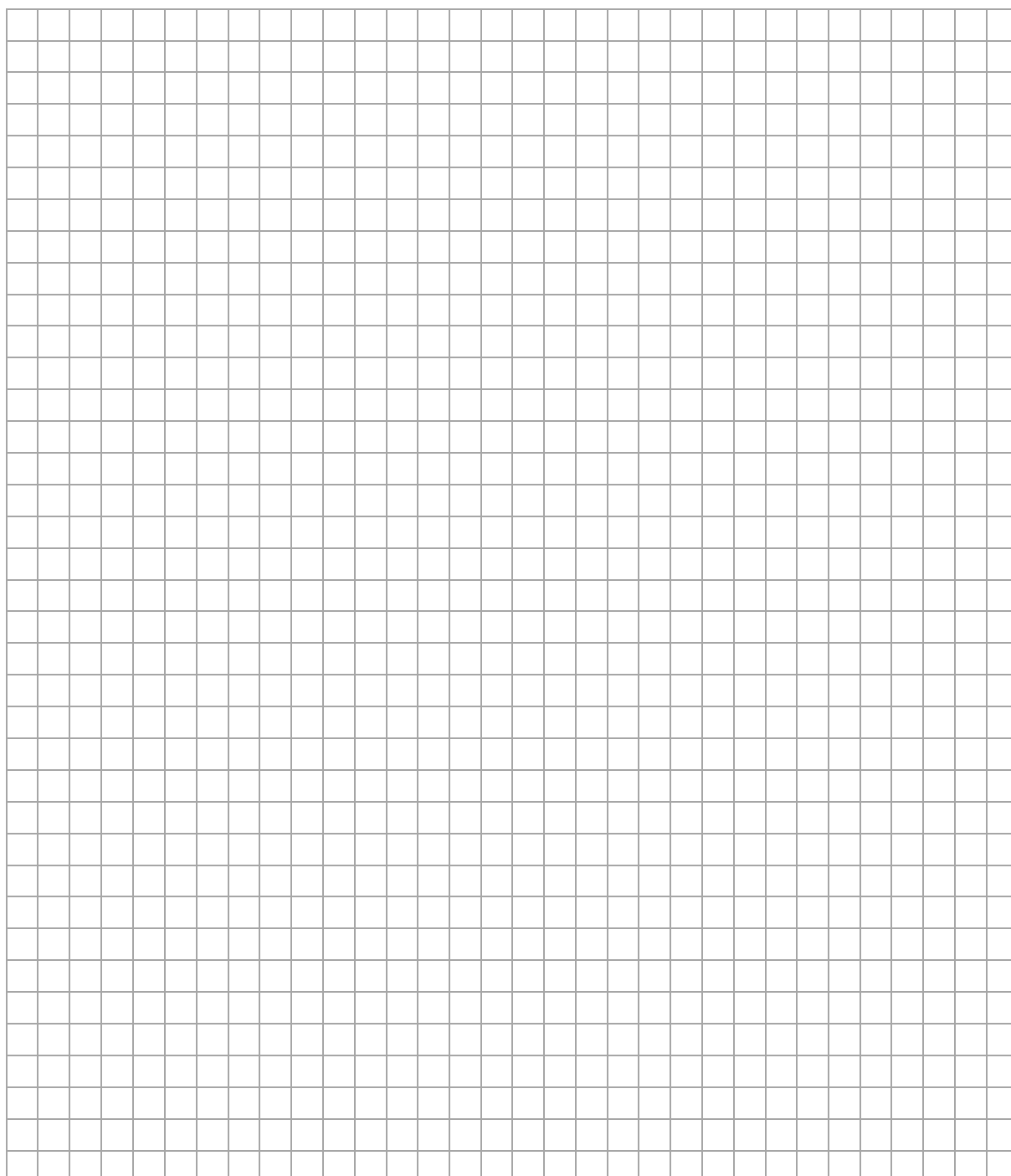
<b>Wypełnia egzaminator</b>	<b>Nr zadania</b>	<b>8.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>4</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>	

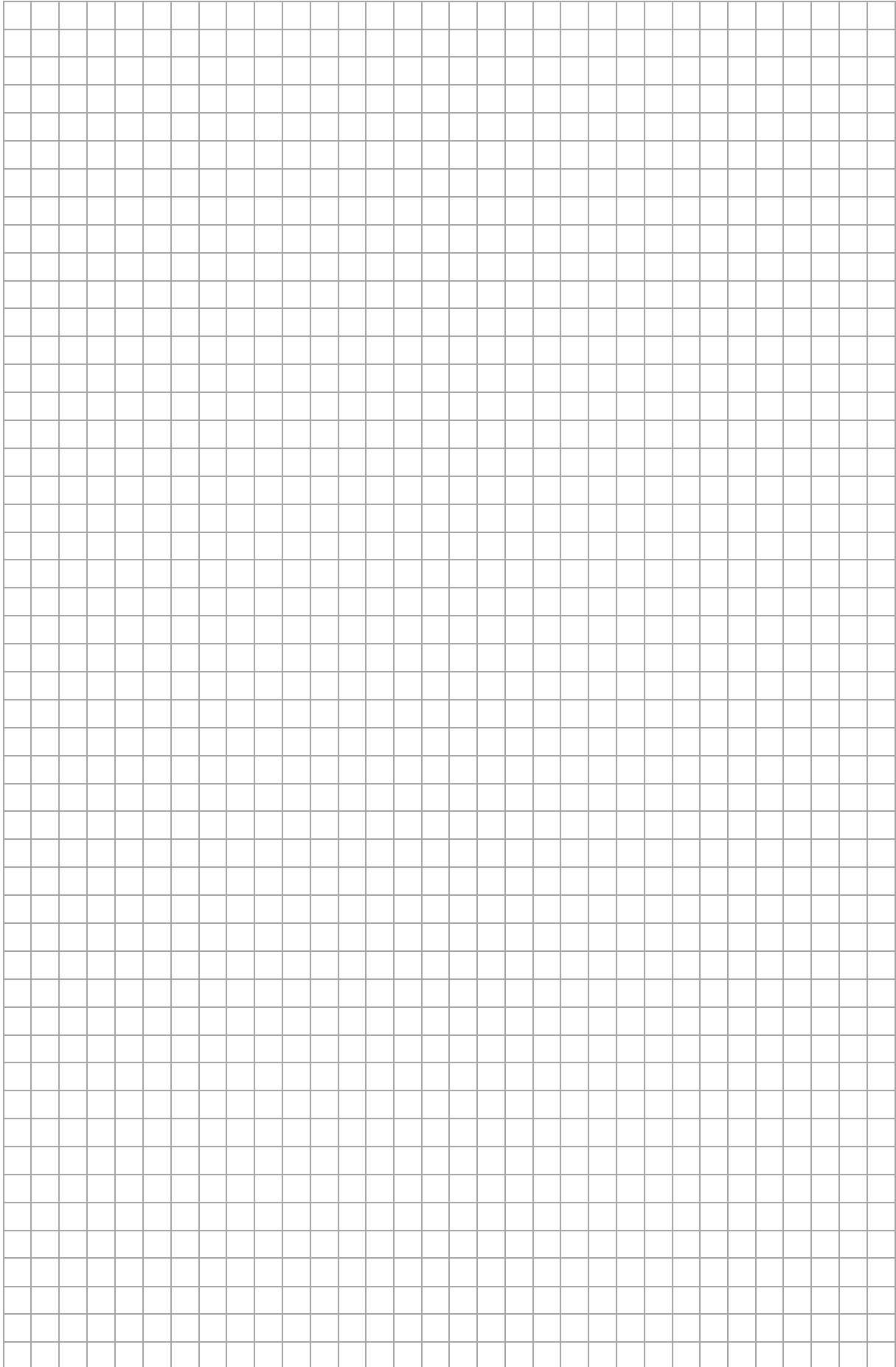
**Zadanie 9. (0–6)**

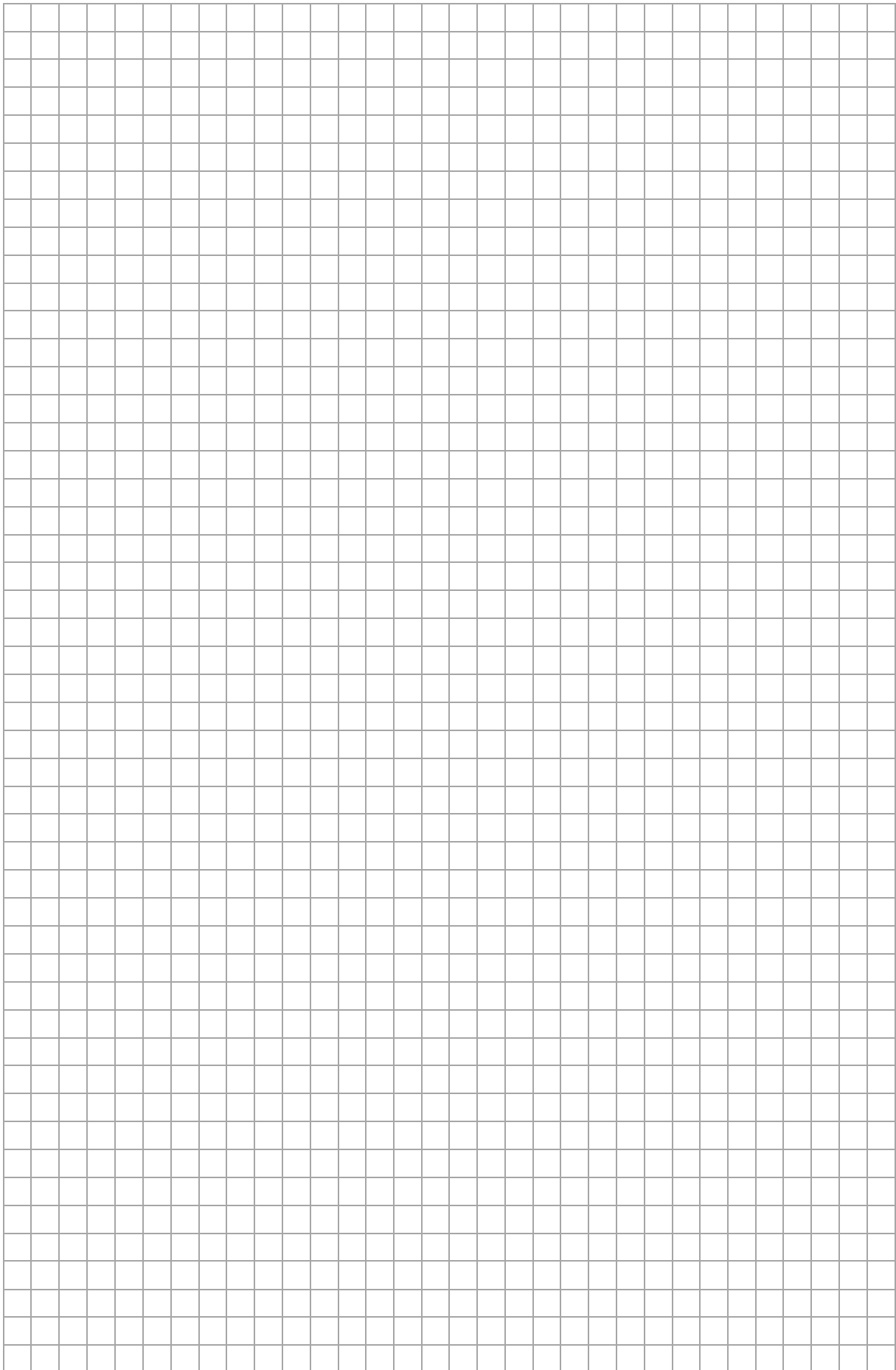
W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  punkt  $A = (9, 12)$  jest wierzchołkiem trójkąta  $ABC$ . Prosta  $k$  o równaniu  $y = \frac{1}{2}x$  zawiera dwusieczną kąta  $ABC$  tego trójkąta. Okrąg  $\mathcal{O}$  o równaniu  $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$  jest wpisany w ten trójkąt.

**Oblicz współrzędne punktu styczności prostej przechodzącej przez wierzchołki  $B$  i  $C$  tego trójkąta z okręgiem  $\mathcal{O}$ .**

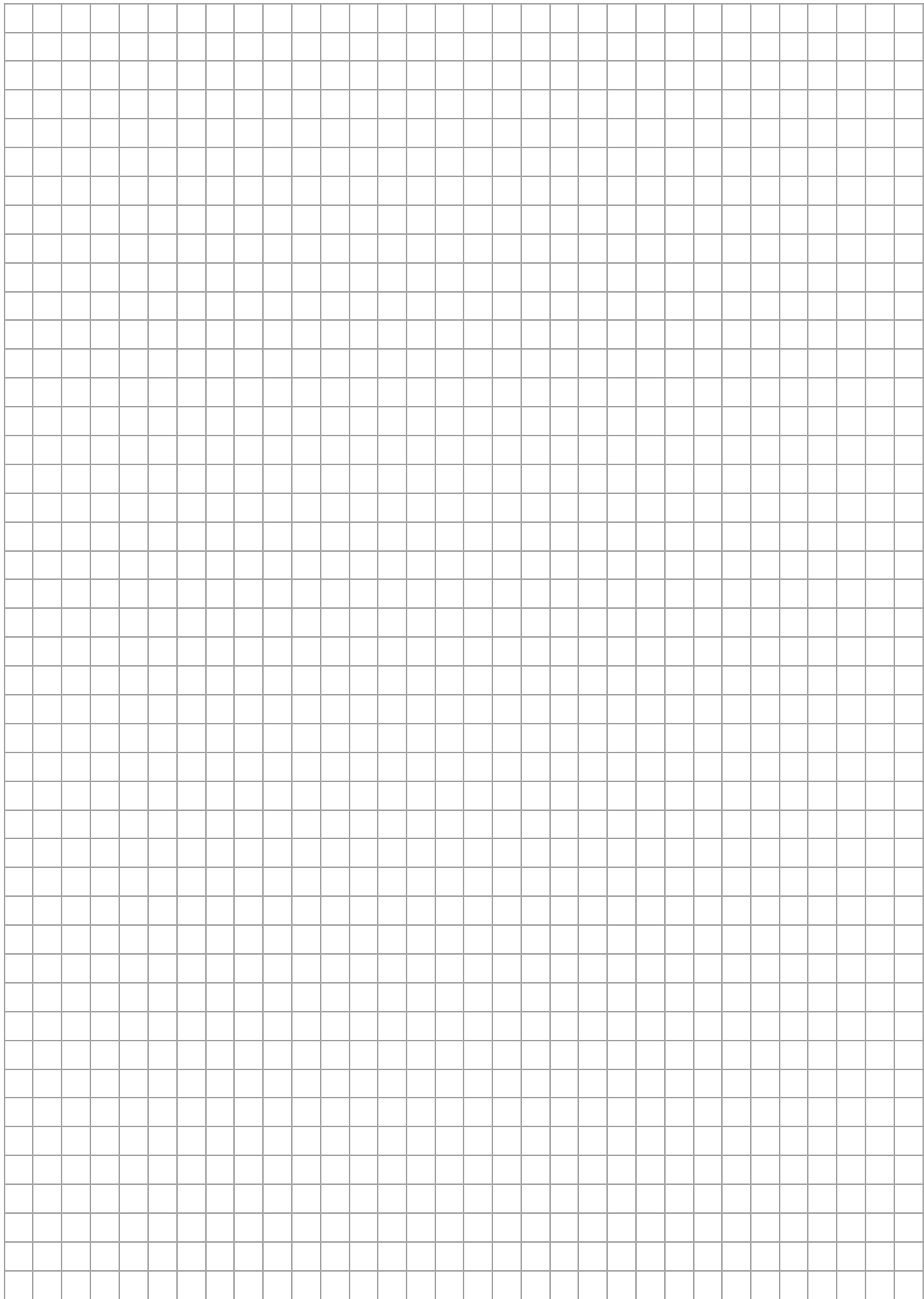
**Zapisz obliczenia.**











<b>Wypełnia egzaminator</b>	<b>Nr zadania</b>	<b>9.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>6</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>	

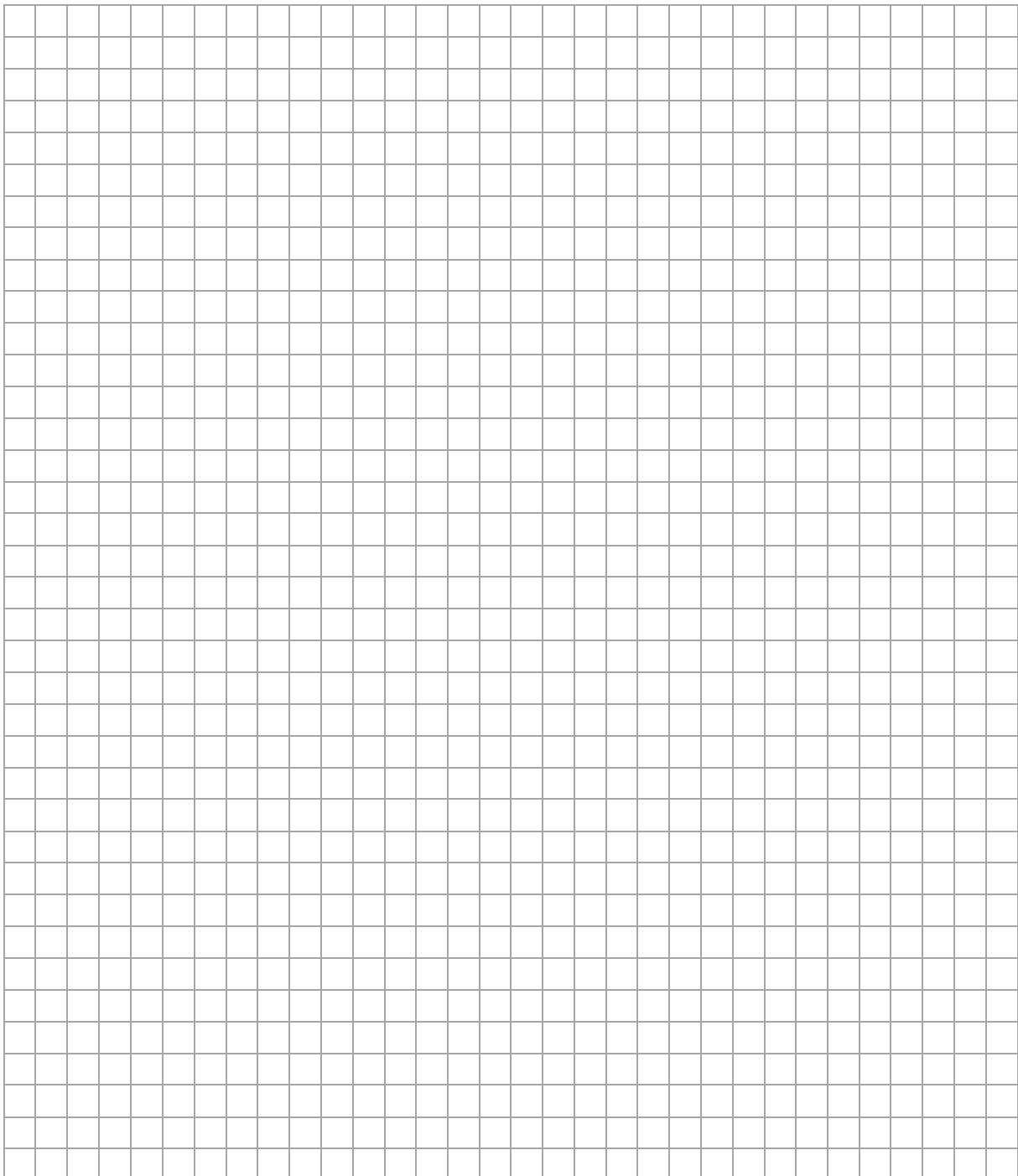
**Zadanie 10. (0–6)**

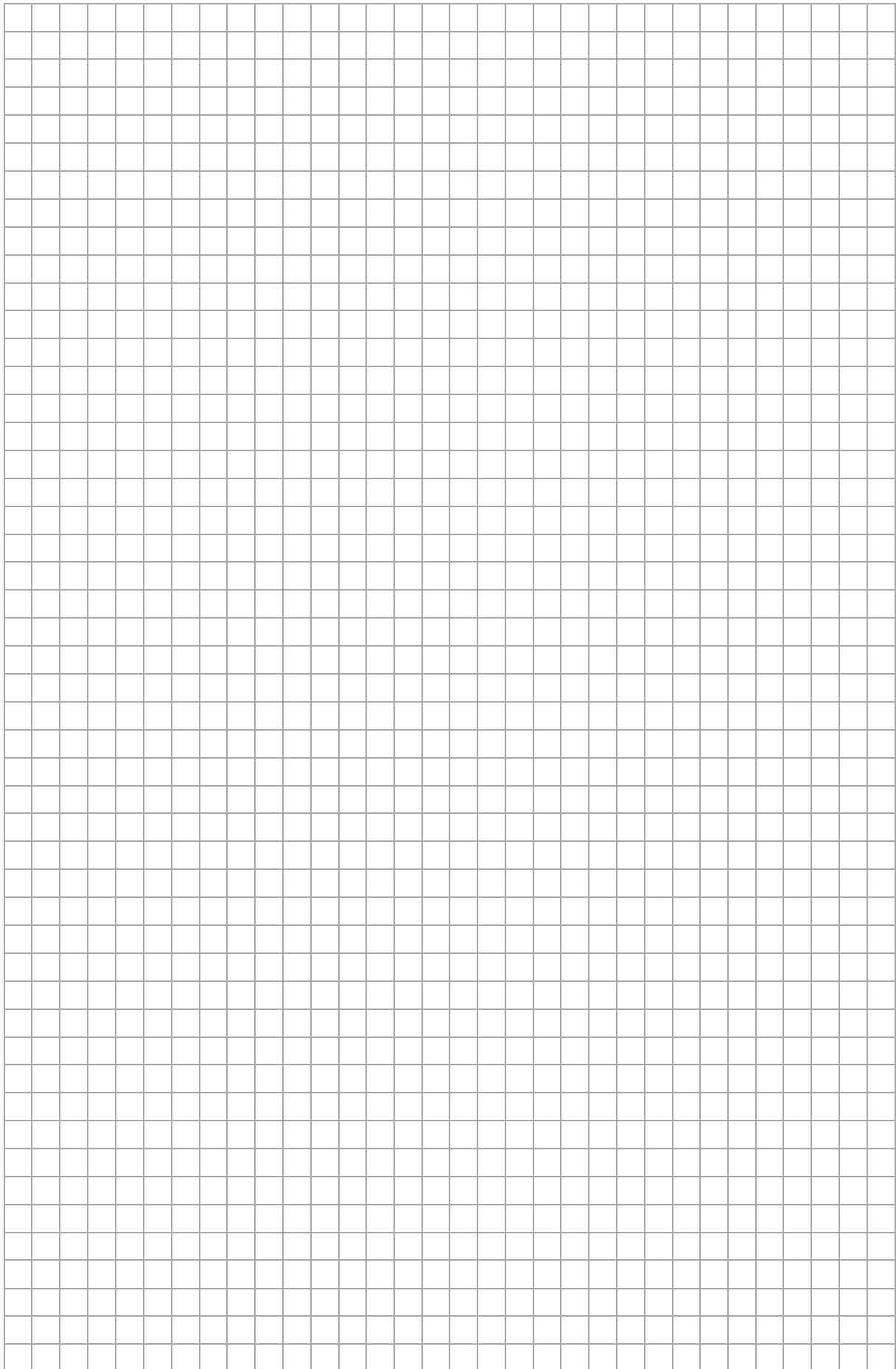
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny  $ABCD S$  o podstawie  $ABCD$  i polu powierzchni bocznej równym  $P$ . Kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka  $S$  ma miarę  $2\alpha$ .

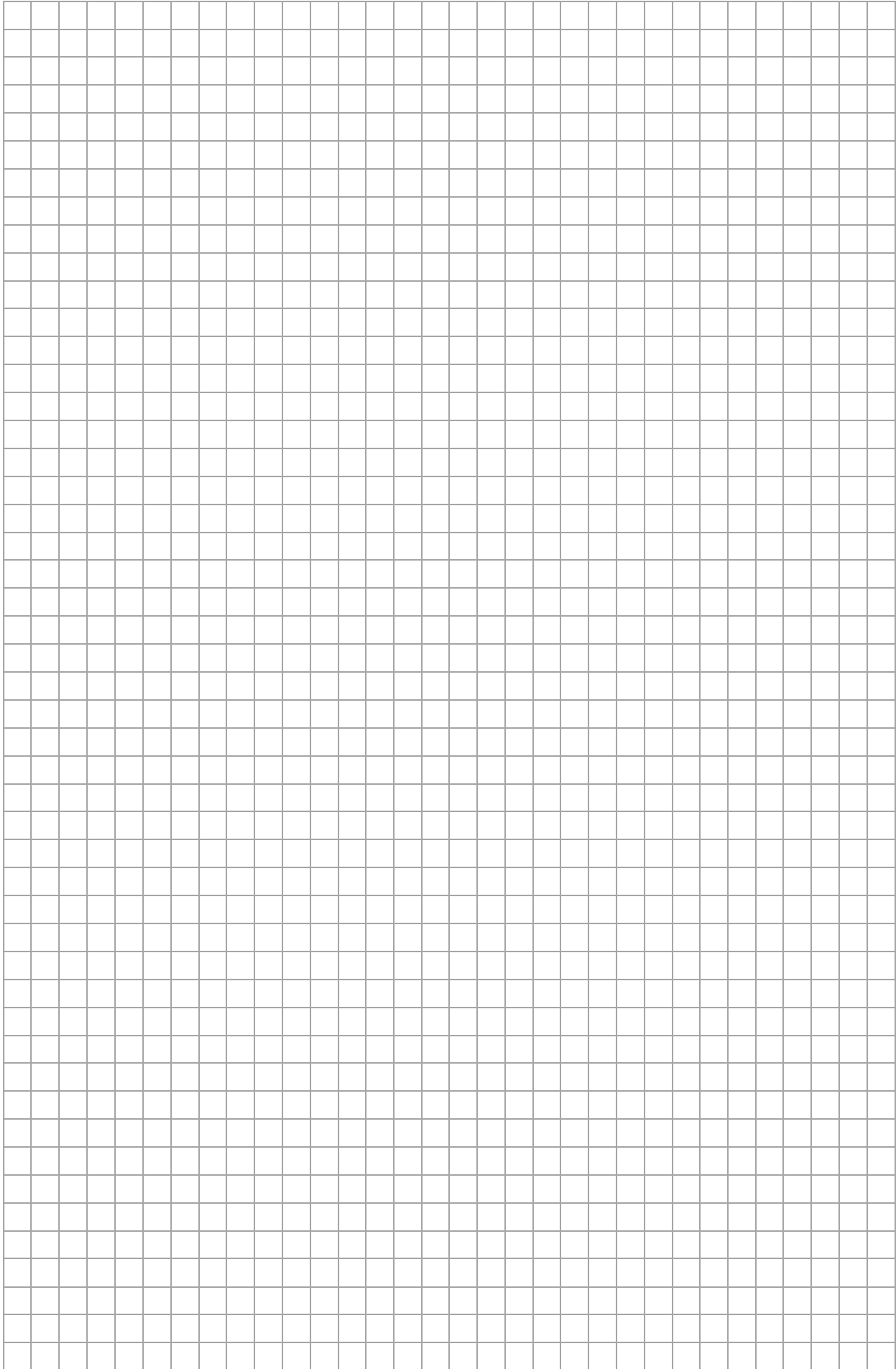
Objętość tego ostrosłupa jest równa  $\sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(2\alpha)}$ , gdzie  $k$  jest stałym współczynnikiem liczbowym.

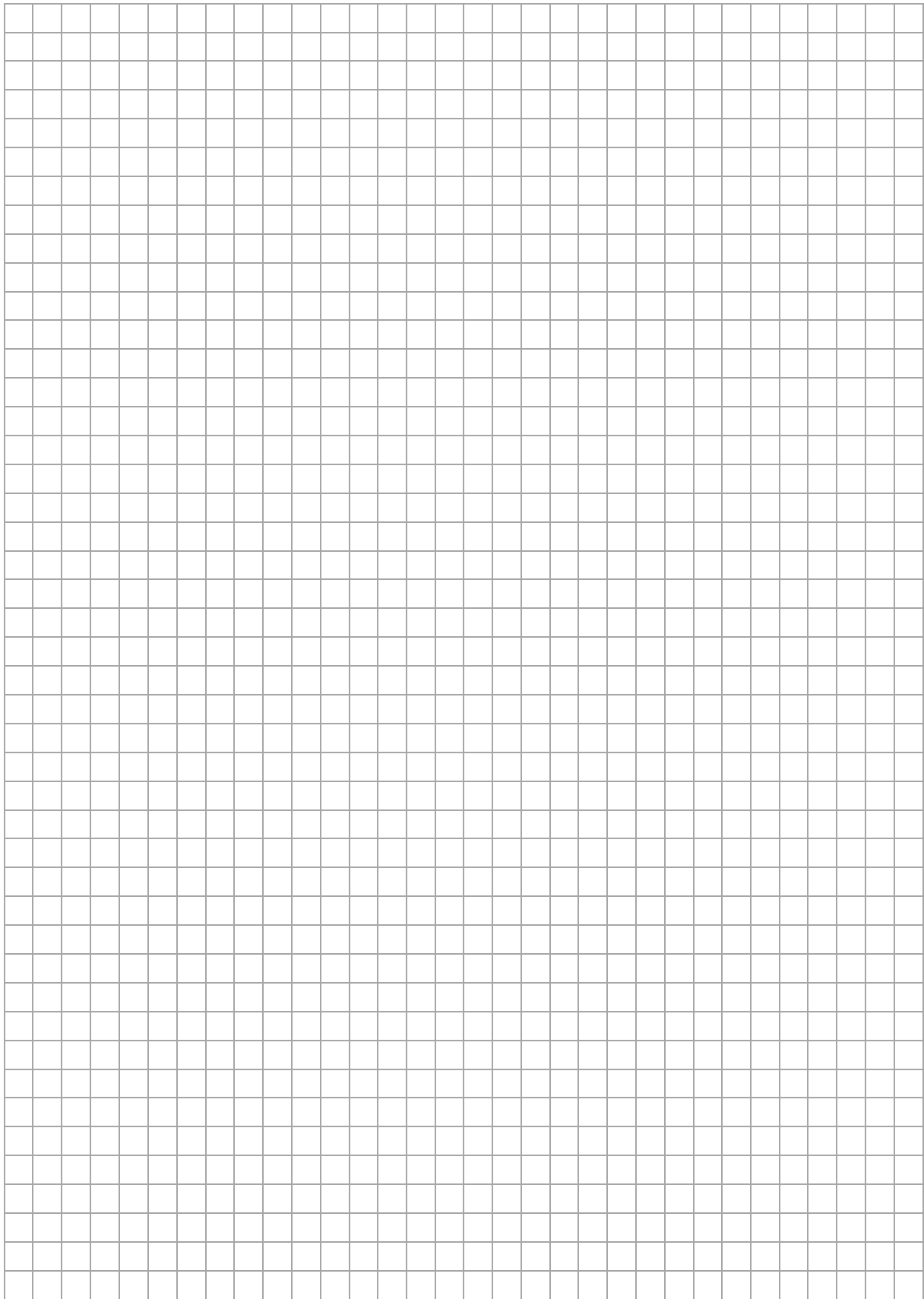
**Oblicz współczynnik  $k$ .**

**Zapisz obliczenia.**









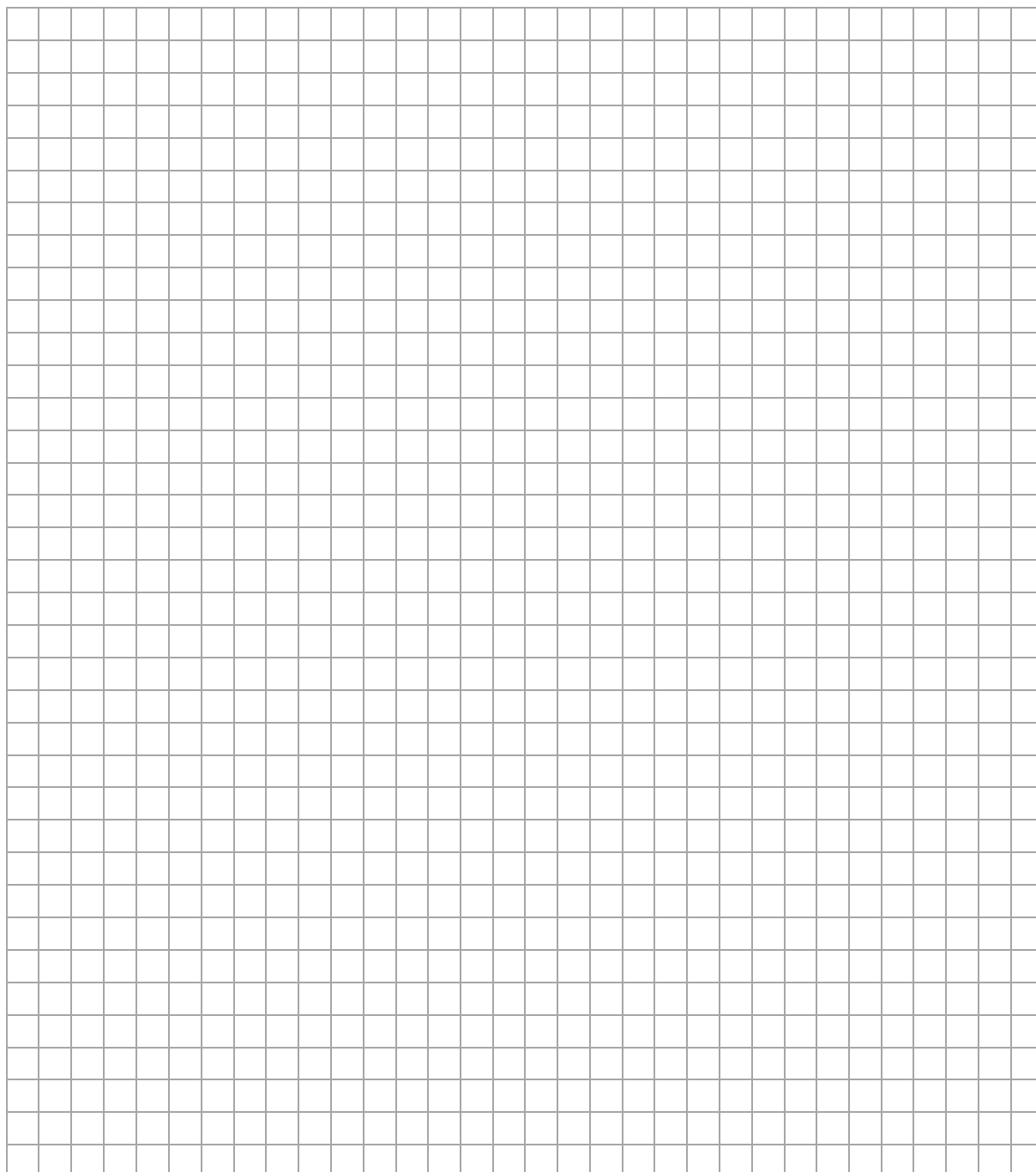
<b>Wypełnia egzaminator</b>	<b>Nr zadania</b>	<b>10.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>6</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>	

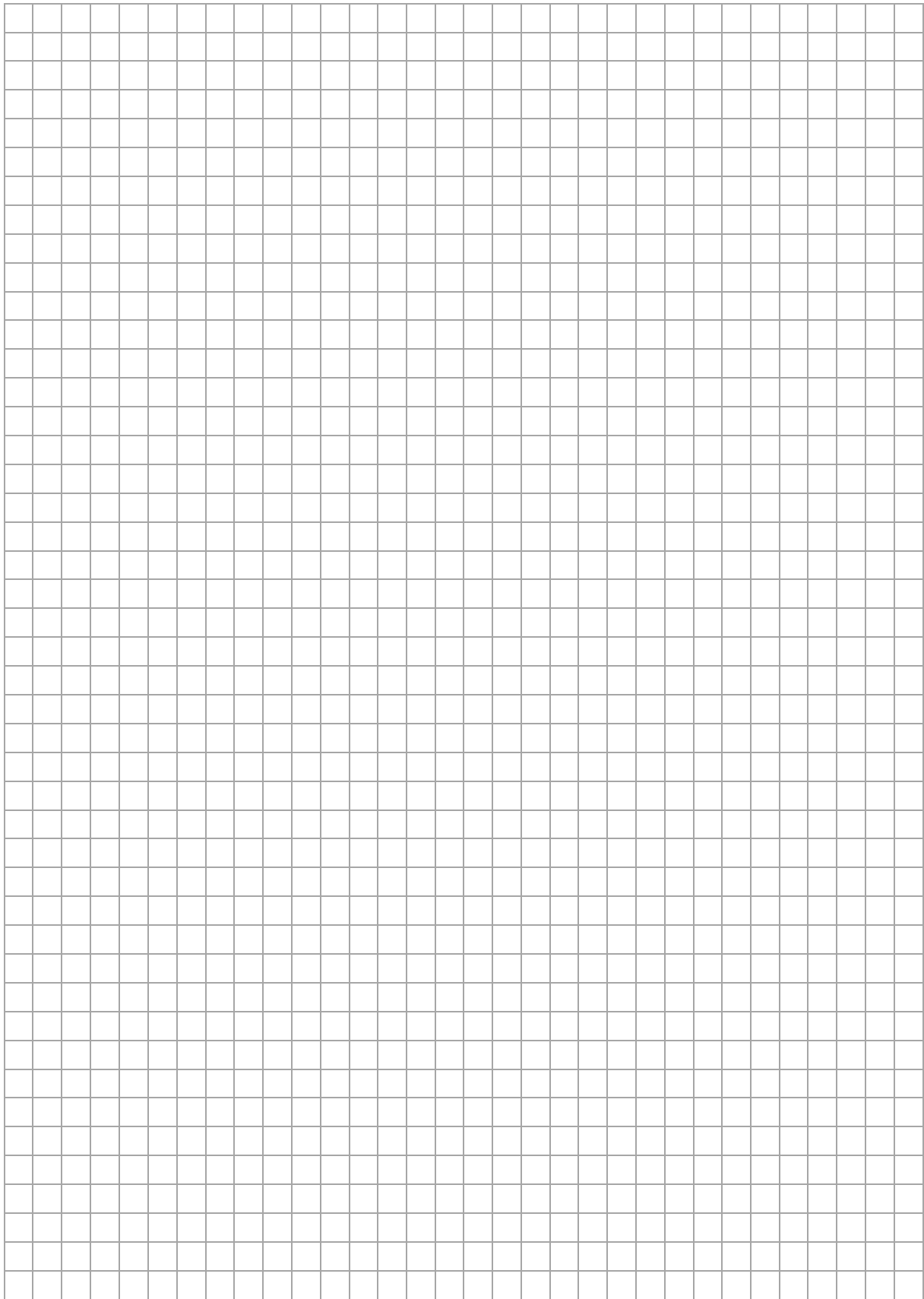
**Zadanie 11. (0–4)**

Egzamin składa się z 15 zadań zamkniętych. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których tylko jedna okazuje się poprawna. Zdający zalicza egzamin, jeśli udzieli poprawnych odpowiedzi w co najmniej 11 zadaniach. Pewien student przystąpił nieprzygotowany do egzaminu i w każdym zadaniu wybierał losowo odpowiedź. Przyjmij, że w każdym zadaniu wybór każdej z odpowiedzi przez studenta jest równo prawdopodobny.

**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ten student zaliczył egzamin.**

**Zapisz obliczenia.**

A large grid of 20 columns and 30 rows, intended for the student to write their calculations.



<b>Wypełnia egzaminator</b>	<b>Nr zadania</b>	<b>11.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>4</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>	

**BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)**

