CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny** **Arkusz pokazowy**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-660, MMAP-R0-700, MMAP-R0-Q00
Data publikacji dokumentu:	4 marca 2022 r.

Uwaga: *Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania*.

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. I.1) (R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie ciągu poprawnych przekształceń i wyrażenie $\log_4 49$ za pomocą danych liczb a oraz b: $\log_4 49 = a \cdot b$.

2 pkt – zastosowanie do $\log_3 4$ wzoru na zamianę podstawy logarytmu i przekształcenie $\log_3 4$ do postaci $\log_3 4 = \frac{2}{\log_2 3}$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu i zapisanie $\log_4 49$ za pomocą logarytmów o podstawie 3 z liczb naturalnych, np. $\log_4 49 = \frac{\log_3 49}{\log_3 4}$, $\log_4 49 = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy $\log_4 49$, stosując wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu, i otrzymujemy

[1] Komunikat o wymaganiach egzaminacyjnych obowiązujących w roku 2023 i 2024, https://www.gov.pl/web/edukacja-i-nauka/wymagania-egzaminacyjne-obowiazujace-na-egzaminie-maturalnym-w-roku-2023-i-2024

$$\log_4 49 = 2 \cdot \log_4 7 = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 4} = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\frac{\log_2 4}{\log_2 3}} = 2 \cdot \log_3 7 \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = 2 \cdot \log_3 7 \cdot \frac{\log_2 3}{2}$$

Zatem

$$\log_4 49 = 2 \cdot b \cdot \frac{a}{2} = a \cdot b$$

Odp. $\log_4 49 = a \cdot b$.

Zadanie 2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.2) (R) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.3) (R) oblicza pochodną funkcji o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia równania stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (-3, -3)$ i podanie prawidłowego wyniku: $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.

2 pkt – podanie poprawnej interpretacji liczby $f'(-3)$ jako współczynnika kierunkowego stycznej i obliczenie $f'(-3)$: $f'(-3) = \frac{3}{4}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy szukanej stycznej:

$$f'(-3) = \frac{(-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 3}{(-3-1)^2} = \frac{9+6-3}{16} = \frac{3}{4}$$

Zatem równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (-3, -3)$ ma postać:

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

Obliczamy współczynnik b. Ponieważ punkt P leży na prostej stycznej, więc $-3 = \frac{3}{4} \cdot (-3) + b$. Stąd $b = -\frac{3}{4}$.

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (-3, -3)$ ma postać $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.

Zadanie 3. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. VI.2) (R) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia ilorazu ciągu i poprawna metoda rozwiązania nierówności $\left|\frac{S-S_n}{S_n}\right| < 0{,}001$ w zbiorze liczb naturalnych dodatnich oraz poprawny wynik: $n > 9$.

3 pkt – zapisanie, że $1 - q^n > 0$ (albo $0 < 1 - q^n < 1$) i przekształcenie nierówności $\left|\frac{S-S_n}{S_n}\right| < 0{,}001$ do postaci nierówności wymiernej z niewiadomą t $(t = q^n)$, np. $\frac{t}{1-t} < 0{,}001$, $\frac{q^n}{1-q^n} < 0{,}001$

LUB

przekształcenie nierówności $\left|\frac{S-S_n}{S_n}\right| < 0{,}001$ do koniunkcji dwóch nierówności wymiernych z niewiadomą t $(t = q^n)$, np. $\frac{t}{1-t} > -0{,}001$ i $\frac{t}{1-t} < 0{,}001$ (albo: $\frac{q^n}{1-q^n} < 0{,}001$ i $\frac{q^n}{1-q^n} > -0{,}001$), i zapisanie, że nierówność $\frac{t}{1-t} > -0{,}001$ jest spełniona dla każdej liczby $t \in (0, 1)$ (analogicznie: zapisanie, że nierówność $\frac{q^n}{1-q^n} > -0{,}001$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej dodatniej n).

2 pkt – obliczenie ilorazu q ciągu (a_n): $q = \frac{1}{2}$.

1 pkt – skorzystanie ze wzorów na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego oraz sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i zapisanie równania $a_1 + a_2 + a_3 = S \cdot (1 - q^3)$

LUB

zapisanie dwóch równań z niewiadomymi a_1 oraz q, wynikających z treści zadania, np. $a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 7$ i $8 = \frac{a_1}{1-q}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) istnieje i jest różna od zera, więc $a_1 \neq 0$ i iloraz q tego ciągu spełnia warunek $|q| < 1$.

Korzystamy ze wzorów na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego oraz na sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i obliczamy iloraz q ciągu (a_n):

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \cdot (1-q^3) = S \cdot (1-q^3)$$

$$7 = 8(1-q^3)$$

$$q = \frac{1}{2}$$

Zatem $S = a_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2a_1$ i $S_n = a_1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2a_1 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$. Stąd, wobec $a_1 \neq 0$, otrzymujemy $\frac{S-S_n}{S_n} = \frac{2a_1 - 2a_1 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{2a_1 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]} = \frac{2a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2a_1 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Rozwiązujemy nierówność $\left|\frac{S-S_n}{S_n}\right| < 0{,}001$ w zbiorze liczb całkowitych dodatnich:

$$\left|\frac{S-S_n}{S_n}\right| < 0{,}001$$

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right| < 0{,}001$$

Ponieważ $q = \frac{1}{2} \in (0,1)$, więc $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$. Zatem nierówność $\left|\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right| < 0{,}001$ możemy przekształcić do postaci $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} < 0{,}001$. Stąd otrzymujemy dalej

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}001\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \quad /\cdot 2^n$$

$$1 < 0{,}001(2^n - 1)$$

$$2^n > 1001$$

Ponieważ $2^9 = 512$ i $2^{10} = 1024$, więc $n > 9$.

Rozwiązaniem nierówności $\left|\frac{S-S_n}{S_n}\right| < 0{,}001$ w zbiorze liczb całkowitych dodatnich są wszystkie liczby naturalne większe od 9.

Zadanie 4. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania […].	Zdający: III.3) (R) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.5) (R) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

5 pkt – wyznaczenie części wspólnej rozwiązań warunków (W1)–(W5) i podanie poprawnego wyniku: $m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty)$.

4 pkt – zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz rozwiązanie warunków (W1)–(W5):

(W1) $m \neq 2$

(W2) $m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$

(W3) $m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

(W4) $m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

(W5) $m \neq 11$.

3 pkt – rozwiązanie warunków (W2)–(W4):

(W2) $m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$

(W3) $m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

(W4) $m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

2 pkt – zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz zapisanie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby równanie (2) było równaniem kwadratowym, które ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste dodatnie różne od liczby 6: $m - 2 \neq 0$ i $\Delta > 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$ i $(m-2) \cdot 6^2 - 4 \cdot (m+3) \cdot 6 + m + 1 \neq 0$

LUB

zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz zapisanie warunków $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$ w zależności od parametru m: $\frac{m+1}{m-2} > 0$ i $-\frac{-4(m+3)}{m-2} > 0$

LUB

zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz wyznaczenie tych wszystkich wartości parametru m, dla których wyróżnik Δ trójmianu $(m-2)x^2 - 4(m+3)x + m + 1 = 0$ jest dodatni.

1 pkt – zapisanie, że równanie (1) ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku tylko wtedy, gdy równanie (2) ma dwa różne rozwiązania dodatnie różne od liczby 6.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Zauważmy, że jednym z rozwiązań równania

$$(x-6)\cdot[(m-2)x^2-4(m+3)x+m+1]=0 \qquad (1)$$

jest liczba 6. Zatem równanie (1) ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$$(m-2)x^2-4(m+3)x+m+1=0 \qquad (2)$$

ma dokładnie dwa różne rozwiązania dodatnie x_1 , x_2 takie, że $x_1 \neq 6$ i $x_2 \neq 6$.
Dla $m=2$ równanie (2) przyjmuje postać $-20x+3=0$ i ma tylko jedno rozwiązanie.
Pozostaje wyznaczyć te wartości parametru m, dla których warunki zadania są spełnione, a równanie (2) jest kwadratowe, tj. wyznaczyć te wartości parametru, dla których spełnione są jednocześnie następujące warunki:

(W1) $m-2\neq 0$
(W2) $\Delta>0$
(W3) $x_1\cdot x_2>0$
(W4) $x_1+x_2>0$
(W5) $(m-2)\cdot 6^2-4\cdot(m+3)\cdot 6+m+1\neq 0$

Rozwiązaniem warunku (W1) jest $m\neq 2$.
Rozwiązujemy nierówność $\Delta>0$:

$$[-4(m+3)]^2-4\cdot(m-2)\cdot(m+1)>0$$

$$16m^2+96m+144-4m^2+4m+8=0$$

$$12m^2+100m+152>0$$

$$m\in\left(-\infty,-\frac{19}{3}\right)\cup(-2,+\infty)$$

Korzystając ze wzorów Viète’a, rozwiązujemy warunek (W3):

$$x_1\cdot x_2>0$$

$$\frac{m+1}{m-2}>0$$

$$(m+1)(m-2)>0\ \wedge\ m\neq 2$$

$$m\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$$

Korzystając ze wzorów Viète’a, rozwiązujemy warunek (W4):

$$x_1+x_2>0$$

$$-\frac{-4(m+3)}{m-2} > 0$$

$$(m+3)(m-2) > 0 \ \wedge \ \ m \neq 2$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek (W5):

$$(m-2) \cdot 6^2 - 4 \cdot (m+3) \cdot 6 + m + 1 \neq 0$$

$$13m - 143 \neq 0$$

$$m \neq 11$$

Wyznaczamy część wspólną rozwiązań warunków (W1)–(W5) i otrzymujemy
$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty)$.
Równanie (1) ma trzy różne rozwiązania tego samego znaku dla
$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty)$.

Zadanie 5. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) (R) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Zasady oceniania

dla sposobu 1.

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $(a-1)^3+a^3+(a+1)^3$ do postaci $3a(a^2+2)$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4, i wykazanie, że liczba $3a(a^2+2)$ jest podzielna przez 4

LUB

przekształcenie wyrażenia $(a-1)^3+a^3+(a+1)^3$ do postaci $3a(a^2+2)$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4, i wykazanie, że liczba $3a(a^2+2)$ jest podzielna przez 9.

1 pkt – zapisanie sumy sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 w postaci $(a-1)^3+a^3+(a+1)^3$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla sposobu 2.

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $(4k+1)^3+(4k+2)^3+(4k+3)^3$ do postaci $36\cdot P(k)+12\cdot Q(k)$, gdzie P i Q są wielomianami o współczynnikach całkowitych, np. $12(16k^3+24k^2+14k+3)$, $36(5k^3+8k^2+4k+1)+12k(k^2+2)$.

1 pkt – zapisanie sumy sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 w postaci $(4k+1)^3+(4k+2)^3+(4k+3)^3$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Sumę sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 można zapisać w postaci $(a-1)^3+a^3+(a+1)^3$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4.

Ponieważ

$(a-1)^3+a^3+(a+1)^3=a^3-3a^2+3a-1+a^3+a^3+3a^2+3a+1=3a(a^2+2)$,

więc liczba $(a-1)^3+a^3+(a+1)^3$ jest podzielna przez 4 jako iloczyn liczby parzystej $3a$ i liczby parzystej a^2+2.
Jeżeli $a=3k$, przy pewnym $k\in\mathbb{Z}$, to $3a(a^2+2)=9k(9k^2+2)$ jest liczbą podzielną przez 9.
Jeżeli $a=3k+1$, przy pewnym $k\in\mathbb{Z}$, to $3a(a^2+2)=3(3k+1)[(3k+1)^2+2]=$
$=3(3k+1)(9k^2+6k+3)=9(3k+1)(3k^2+2k+1)$ jest liczbą podzielną przez 9.
Jeżeli $a=3k+2$, przy pewnym $k\in\mathbb{Z}$, to liczba $3a(a^2+2)=$
$=3(3k+2)[(3k+2)^2+2]=3(3k+2)(9k^2+12k+6)=9(3k+2)(3k^2+4k+2)$
jest liczbą podzielną przez 9.
Zatem suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest podzielna przez 9.
Ponieważ suma trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 4 i przez 9 oraz liczby 4 i 9 są względnie pierwsze, więc ta suma jest liczbą podzielną przez 36.

Sposób 2.
Sumę sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 można zapisać w postaci $(4k+1)^3+(4k+2)^3+(4k+3)^3$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.
Ponieważ $(4k+1)^3+(4k+2)^3+(4k+3)^3=$

$$=64k^3+48k^2+12k+1+64k^3+96k^2+48k+8+64k^3+144k^2+108k+27=$$
$$=192k^3+288k^2+168k+36=12(16k^3+24k^2+14k+3)=$$

$=36(5k^3+8k^2+4k+1)+12k(k^2+2)$, więc wystarczy pokazać, że liczba $k(k^2+2)$ jest podzielna przez 3 dla każdego $k\in\mathbb{Z}$.
Jeżeli $k=3m$, gdzie $m\in\mathbb{Z}$, to liczba $k(k^2+2)=3m(9m^2+2)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej $m(9m^2+2)$.
Jeżeli $k=3m+1$, gdzie $m\in\mathbb{Z}$, to liczba $k(k^2+2)=(3m+1)[(3m+1)^2+2]=$
$=(3m+1)(9m^2+6m+3)=3(3m+1)(3m^2+2m+1)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej $(3m+1)(3m^2+2m+1)$.
Jeżeli $k=3m+2$, gdzie $m\in\mathbb{Z}$, to liczba $k(k^2+2)=(3m+2)[(3m+2)^2+2]=$
$(3m+2)(9m^2+12m+6)=3(3m+2)(3m^2+4m+2)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej $(3m+2)(3m^2+4m+2)$.

Zadanie 6.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych; 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2. IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania

2 pkt – doprowadzenie wyrażenia określającego długość odcinka PR do postaci $\sqrt{\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{13}{8}x^2+\frac{39}{8}x+\frac{593}{64}}$.

1 pkt – przyjęcie $R=(x,-0{,}5(x-0{,}5)^2+4)$ (lub $R=\big(x,g(x)\big)$) i zastosowanie wzoru na odległość dwóch punktów do wyznaczenia długości odcinka PR:
$|PR|=\sqrt{(x+1)^2+(-0{,}5(x-0{,}5)^2+4-1)^2}$
(lub $|PR|=\sqrt{(x+1)^2+(g(x)-1)^2}$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ $R\in g$, więc $R=(x,-0{,}5(x-0{,}5)^2+4)$. Zatem

$$|PR|=\sqrt{\big(x-(-1)\big)^2+(-0{,}5(x-0{,}5)^2+4-1)^2}$$

Stosując wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń, otrzymujemy

$$|PR|=\sqrt{x^2+2x+1+(-0{,}5(x-0{,}5)^2)^2+2\cdot(-0{,}5)(x-0{,}5)^2\cdot 3+9}$$

$$|PR|=\sqrt{x^2+2x+1+\frac{1}{4}\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-3\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+9}$$

$$|PR|=\sqrt{x^2+2x+1+\frac{1}{4}\left(x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)-3x^2+3x-\frac{3}{4}+9}$$

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

To należało pokazać.

Zadanie 6.2. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.3) (R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym […]; XIII.4) (R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.5) (R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

6 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i poprawne uzasadnienie, że funkcja d przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$, obliczenie współrzędnych punktu K oraz długości $|PK|$ toru: $K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $|PK| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

5 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i uzasadnienie, że funkcja k przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$

LUB

poprawne uzasadnienie, że funkcja d przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$ oraz obliczenie $g\left(\frac{3}{2}\right)$, oraz obliczenie $d\left(\frac{3}{2}\right)$: $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$, $d\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

4 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji k: $x = \frac{3}{2}$

LUB

uzasadnienie, że funkcja k przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$.

3 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i wyznaczenie pochodnej funkcji k: $k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8}$ dla $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$

LUB

obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji k: $x = \frac{3}{2}$.

2 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i określenie dziedziny funkcji d: $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$

LUB

wyznaczenie pochodnej funkcji k: $k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8}$ dla $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$.

1 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g

LUB

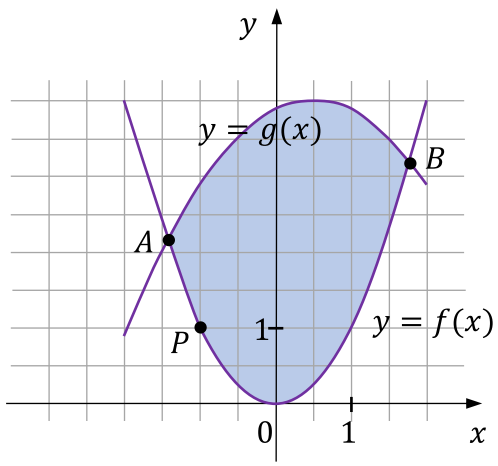
określenie dziedziny funkcji d: $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pokażemy najpierw, że optymalna lokalizacja końca toru regatowego musi znajdować się na linii brzegowej określonej przez funkcję g.

Niech $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ będą punktami przecięcia wykresów funkcji f i g (zobacz rysunek).



Współrzędne każdego punktu $C = (x_C, y_C)$ leżącego na fragmencie paraboli (będącej wykresem funkcji f) pomiędzy punktami A i B spełniają nierówności

$$|x_C - x_P| \leq |x_B - x_P| \quad \wedge \quad |y_C - y_P| \leq |y_B - y_P|$$

więc

$$|x_C - x_P|^2 + |y_C - y_P|^2 \leq |x_B - x_P|^2 + |y_B - y_P|^2$$

$$|PC|^2 \leq |PB|^2$$

$$|PC| \leq |PB|$$

Ponieważ $B \in g$, więc optymalna lokalizacja końca toru musi znajdować się na linii brzegowej określonej przez funkcję g.
Obliczamy pierwsze współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji f i g:

$$x^2 = -0{,}5(x - 0{,}5)^2 + 4$$

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{31}{8} = 0$$

$$12x^2 - 4x - 31 = 0$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{94}}{6} \approx -1{,}45 \quad \vee \quad x = \frac{1 + \sqrt{94}}{6} \approx 1{,}78$$

Zatem $x_A = \frac{1-\sqrt{94}}{6}$ oraz $x_B = \frac{1+\sqrt{94}}{6}$.
W celu wyznaczenia punktu, w którym należy umiejscowić koniec toru, rozpatrujemy funkcję d określoną wzorem

$$d(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

dla każdego $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$ i szukamy argumentu, dla którego funkcja ta osiąga wartość największą.
Funkcja d określa odległość punktu P od punktu R (leżącego na linii brzegowej określonej przez funkcję g) w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu R.
Tworzymy funkcję pomocniczą k określoną wzorem
$k(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}$ dla $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$.
Obliczamy pochodną funkcji k:

$$k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8}$$

i miejsca zerowe pochodnej:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8} = 0$$

$$8x^3 - 12x^2 - 26x + 39 = 0$$

$$4x^2(2x - 3) - 13(2x - 3) = 0$$

$$(4x^2 - 13)(2x - 3) = 0$$

$$x = -\frac{\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3}{2}$$

Spośród liczb $\left(-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{3}{2}$ tylko liczba $\frac{3}{2}$ należy do przedziału $\left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$.
Zatem $k'(x) = 0$ tylko dla $x = \frac{3}{2}$.
Ponieważ:

$k'(x) > 0$ dla $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{3}{2}\right)$ oraz

$k'(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$,

więc

funkcja k jest rosnąca w zbiorze $\left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{3}{2}\right]$ oraz malejąca w zbiorze $\left[\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$.

Zatem funkcja k osiąga wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$.

Ponieważ funkcja $h(t) = \sqrt{t}$ jest rosnąca w zbiorze $[0, +\infty)$, więc funkcja d osiąga wartość największą dla tego samego argumentu, dla którego funkcja k osiąga wartość największą.

Stąd wynika, że funkcja d osiąga wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$.

Obliczamy współrzędne punktu K oraz $|PK|$:

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -0{,}5\left(\frac{3}{2} - 0{,}5\right)^2 + 4 = 3{,}5$$

$$K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$|PK| = d\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Koniec toru regatowego należy zlokalizować w punkcie, który odpowiada punktowi $K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Największa możliwa długość toru regatowego jest równa $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (j).

Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.5 (R) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych; VII.6) (R) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x\cos 5x = 2\cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne rozwiązanie równania $\sin(3x) = 2\sin x$ w zbiorze $[0,\pi]$:

$x = 0 \lor x = \frac{1}{6}\pi \lor x = \frac{5}{6}\pi \lor x = \pi$.

3 pkt – przekształcenie równoważne równania $\sin(3x) = 2\sin x$ do postaci alternatywy równań $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = -\frac{1}{2}$ oraz $\sin x = 0$ i zapisanie, że równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$ nie ma rozwiązań w zbiorze $[0,\pi]$, i rozwiązanie równania $\sin x = \frac{1}{2}$ (lub $\sin x = 0$) w zbiorze $[0,\pi]$: $x = \frac{1}{6}\pi \lor x = \frac{5}{6}\pi$ (lub $x = 0 \lor x = \pi$).

2 pkt – przekształcenie równoważne równania $\sin(3x) = 2\sin x$ do postaci alternatywy dwóch równań: $1 - 4\sin^2 x = 0$ lub $\sin x = 0$.

1 pkt – przekształcenie równania $\sin(3x) = 2\sin x$ do postaci, w której występuje jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x, np.

$2\sin x\,(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie $\sin(3x) = 2\sin x$ równoważnie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x. Skorzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów, wzorów na cosinus i sinus podwojonego kąta oraz z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin(3x) = 2\sin x$$

$$\sin(2x + x) = 2\sin x$$

$$\sin(2x)\cdot\cos x + \cos(2x)\cdot\sin x = 2\sin x$$

$$2\sin x\cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x = 2\sin x$$

$$2\sin x\,(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x$$

$$-4\sin^3 x + \sin x = 0$$

Stąd otrzymujemy dalej

$$(-4\sin^2 x + 1)\sin x = 0$$

$$-4\sin^2 x + 1 = 0 \quad \vee \quad \sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = 0$$

Równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ ma w zbiorze $[0, \pi]$ dwa rozwiązania: $x = \frac{1}{6}\pi$ oraz $x = \frac{5}{6}\pi$.
Równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$ nie ma w zbiorze $[0, \pi]$ rozwiązań.
Równanie $\sin x = 0$ ma w zbiorze $[0, \pi]$ dwa rozwiązania: $x = 0$ oraz $x = \pi$.

Równanie $\sin(3x) = 2\sin x$ ma w zbiorze $[0, \pi]$ cztery rozwiązania: $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$.

Zadanie 8. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.1) (R) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu; VIII.2) (R) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne zastosowanie twierdzeń i zależności prowadzących do obliczenia promienia R okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ i pokazanie, że $R=\frac{d\cdot l}{2\sqrt{16d^2-l^2}}$.

3 pkt – zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta ABC i zapisanie równości $2R=\frac{d}{\sin\alpha}$.

2 pkt – obliczenie wysokości h trapezu $ABCD$: $h=\frac{\sqrt{16d^2-l^2}}{4}$.

1 pkt – zastosowanie własności czworokąta opisanego na okręgu i obliczenie c: $c=\frac{1}{4}l$

LUB

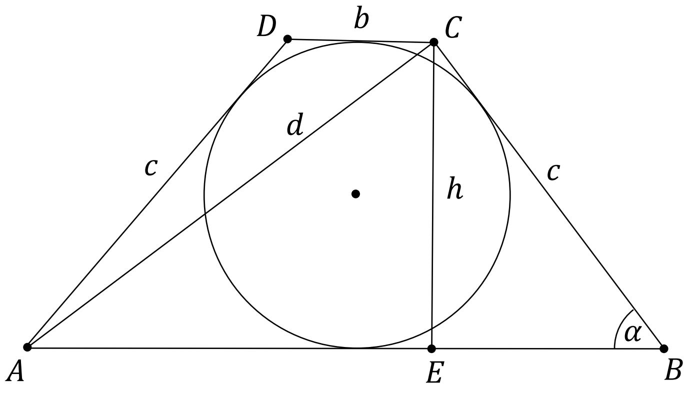
zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do trójkąta AEC i zapisanie równości $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+h^2=d^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość podstawy AB trapezu,
b – długość podstawy CD trapezu,
h – wysokość trapezu $ABCD$,
c – długość ramienia trapezu $ABCD$,
α – miara kąta ABC trapezu.
E – punkt wspólny prostej przechodzącej przez C i zawierającej wysokość trapezu oraz odcinka AB (zobacz rysunek).



Trapez $ABCD$ jest równoramienny, więc $|EB|=\frac{a-b}{2}$ oraz $|AE|=\frac{a+b}{2}$.

Ponieważ $a+b+2c=l$ (z warunków zadania) oraz $a+b=2c$ (z własności czworokąta opisanego na okręgu otrzymujemy), więc $4c=l$, czyli $c=\frac{1}{4}l$. Stąd też $|AE|=\frac{a+b}{2}=c$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta AEC i wyznaczamy wysokość h trapezu:

$$|AE|^2 + |EC|^2 = |AC|^2$$

$$c^2 + h^2 = d^2.$$

$$h^2 = d^2 - c^2 = d^2 - \left(\frac{l}{4}\right)^2$$

$$h = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{4}$$

Okrąg opisany na trapezie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Stosujemy twierdzenie sinusów do wyznaczenia promienia R okręgu opisanego na trójkącie ABC:

$$2R = \frac{|AC|}{\sin\alpha}$$

Sinus kąta α obliczamy z trójkąta prostokątnego BEC:

$$\sin\alpha = \frac{h}{c} = \frac{\frac{\sqrt{16d^2-l^2}}{4}}{\frac{l}{4}} = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{l}$$

Zatem promień R jest równy

$$R = \frac{|AC|}{2\sin\alpha} = \frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$$

To kończy dowód.

Zadanie 9. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.1) (R) posługuje się równaniem prostej w postaci ogólnej na płaszczyźnie, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach […]; IX.3) (R) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu […].

Zasady oceniania

6 pkt – wyznaczenie równania prostej BC i obliczenie współrzędnych punktu styczności prostej BC z okręgiem $\mathcal{O}$: $y=0$ i $(8,0)$.

5 pkt – uzasadnienie, że prosta o równaniu $y=-\frac{12}{5}x+\frac{168}{5}$ nie przechodzi przez punkt B i obliczenie współrzędnych punktu B: $B=(0,0)$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu B: $B=(0,0)$

LUB

– uzasadnienie, że prosta o równaniu $y=-\frac{12}{5}x+\frac{168}{5}$ nie przechodzi przez punkt B.

3 pkt – wyznaczenie równań prostych, które są styczne do okręgu $\mathcal{O}$ i przechodzą przez punkt A, np. $y=\frac{4}{3}x$ i $y=-\frac{12}{5}x+\frac{168}{5}$.

2 pkt – zastosowanie wzoru na odległość punktu od prostej i zapisanie równania z jedną niewiadomą, prowadzącego do wyznaczenia współczynników występujących w równaniu prostej, która jest styczna do okręgu $\mathcal{O}$ i przechodzi przez punkt A, np.
$\frac{|a\cdot 8-4+12-9a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=4$.

1 pkt – zapisanie równania prostej, która jest styczna do okręgu i przechodzi przez punkt A w postaci kierunkowej (lub ogólnej), ze współczynnikami zależnymi od jednego parametru, np. $y=ax+12-9a$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez l prostą, która przechodzi przez wierzchołki A i B trójkąta ABC. Prosta ta jest styczna do okręgu $\mathcal{O}$. Równanie prostej l można zapisać w postaci kierunkowej $y=ax+b$ (prosta o równaniu $x=9$ nie jest styczna do okręgu, gdyż równanie $(9-8)^2+(y-4)^2=16$ ma dwa rozwiązania). Ponieważ $A\in l$, więc $12=9a+b$, czyli $b=12-9a$.

Prosta l ma równanie $ax - y + 12 - 9a = 0$ i jest styczna do okręgu o środku $S = (8, 4)$ i promieniu 4. Zatem odległość punktu S od prostej l jest równa 4:

$$\frac{|a \cdot 8 - 4 + 12 - 9a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

Stąd, poprzez przekształcenia równoważne, otrzymujemy kolejno

$$|8 - a| = 16\sqrt{a^2 + 1}$$

$$64 - 16a + a^2 = 16a^2 + 16$$

$$15a^2 + 16a - 48 = 0$$

$$a = \frac{4}{3} \quad \vee \quad a = -\frac{12}{5}$$

Rozważamy przypadek $a = \frac{4}{3}$.

Gdy $a = \frac{4}{3}$, to $b = 0$ i równanie prostej l ma postać $y = \frac{4}{3}x$.

Wierzchołek B trójkąta ABC jest punktem przecięcia prostych k i l.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$ jest $(x, y) = (0, 0)$. Zatem $B = (0, 0)$. Ponieważ okrąg O jest styczny do osi Ox i $B = (0, 0)$, więc prosta o równaniu $y = 0$ zawiera bok BC trójkąta ABC styczny do danego okręgu w punkcie $(8, 0)$.

Rozważamy przypadek $a = -\frac{12}{5}$.

Gdy $a = -\frac{12}{5}$, to $b = \frac{168}{5}$ i otrzymujemy prostą l o równaniu $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$.

Zauważmy jednak, że prosta o równaniu $y = \frac{5}{12}x$ jest prostopadła do prostej $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$ i tworzy z osią Ox kąt ostry o mierze α takiej, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Prosta k tworzy z osią Ox kąt ostry o mierze β takiej, że $\tan\beta = \frac{1}{2}$. Zatem, korzystając z własności funkcji tangens, otrzymujemy $\alpha < \beta$. Wynika stąd, że $|\measuredangle ABS| > 90°$, gdzie B jest punktem przecięcia prostych k i l. To jest jednak niemożliwe, gdyż (z założenia) $|\measuredangle ABS| = \frac{1}{2}|\measuredangle ABC|$, a $\frac{1}{2}|\measuredangle ABC| < \frac{1}{2} \cdot 180°$.

Zadanie 10. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni […] ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń. X.5) (R) wyznacza przekroje […] ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

dla sposobu 1.

6 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na objętość V ostrosłupa i poprawne obliczenie współczynnika k: $k = \frac{\sqrt{2}}{36}$.

5 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach P i α, wysokości H ostrosłupa:

$H = \sqrt{\frac{P \cdot \cos(2\alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin\alpha}}$.

4 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach P i α, kwadratu długości krawędzi podstawy oraz kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin\alpha$,

$h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin\alpha}$.

3 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach P i α, kwadratu długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin\alpha$

LUB

obliczenie, przy obranych wartościach P i α, kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin\alpha}$.

2 pkt – zastosowanie, przy obranych wartościach P i α, definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą a, np.

$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{P}{2a}} = \sin\alpha$, $\left(\frac{P}{2a}\right)^2 + \left(\frac{P}{2a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{P}{2a} \cdot \frac{P}{2a} \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

LUB

zapisanie, przy obranych wartościach P i α, zależności między h oraz a, wynikających ze związków miarowych w trójkącie ESF (lub EGS), np. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

LUB

zastosowanie, przy obranych wartościach P i α, definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą h, np.

$\frac{\frac{P\sqrt{2}}{8h}}{h} = \sin\alpha$, $h^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot h \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{P\sqrt{2}}{4h}\right)^2$.

1 pkt – przypisanie wielkościom P i α konkretnych wartości liczbowych
(pod warunkami: $P > 0$ i $\alpha \in (0, 45°)$) i wyznaczenie wysokości h ściany bocznej
w zależności od długości a krawędzi podstawy ostrosłupa: $h = \frac{P}{2a}$
LUB
przypisanie wielkościom P i α konkretnych wartości liczbowych
(pod warunkami: $P > 0$ i $\alpha \in (0, 45°)$) i wyznaczenie długości a krawędzi bocznej
w zależności od wysokości h ściany bocznej ostrosłupa: $a = \frac{P}{2h}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla sposobu 2.

6 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na objętość V ostrosłupa i poprawne obliczenie
współczynnika k: $k = \frac{\sqrt{2}}{36}$.

5 pkt – obliczenie wysokości H ostrosłupa: $H = \sqrt{\frac{P}{4\sqrt{2}\cdot\sin\alpha} - \frac{\sqrt{2}P\cdot\sin\alpha}{4}}$.

4 pkt – obliczenie kwadratu długości krawędzi podstawy oraz kwadratu wysokości ściany
bocznej ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin\alpha$, $h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}$.

3 pkt – obliczenie kwadratu długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin\alpha$
LUB
obliczenie kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}$.

2 pkt – zastosowanie definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do
trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą a, np.

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{P}{2a}} = \sin\alpha, \quad \left(\frac{P}{2a}\right)^2 + \left(\frac{P}{2a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{P}{2a} \cdot \frac{P}{2a} \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

LUB
zastosowanie definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do
trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą h, np.

$$\frac{\frac{P\sqrt{2}}{8h}}{h} = \sin\alpha, \quad h^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot h \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{P\sqrt{2}}{4h}\right)^2.$$

1 pkt – wyznaczenie wysokości h ściany bocznej w zależności od długości a krawędzi
podstawy ostrosłupa: $h = \frac{P}{2a}$
LUB
wyznaczenie długości a krawędzi bocznej w zależności od wysokości h ściany
bocznej ostrosłupa: $a = \frac{P}{2h}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Ponieważ k jest współczynnikiem liczbowym, który nie zależy od P ani od α, więc obliczymy objętość ostrosłupa prawidłowego o polu powierzchni bocznej $P = \sqrt{2}$, w którym $\alpha = 30°$.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

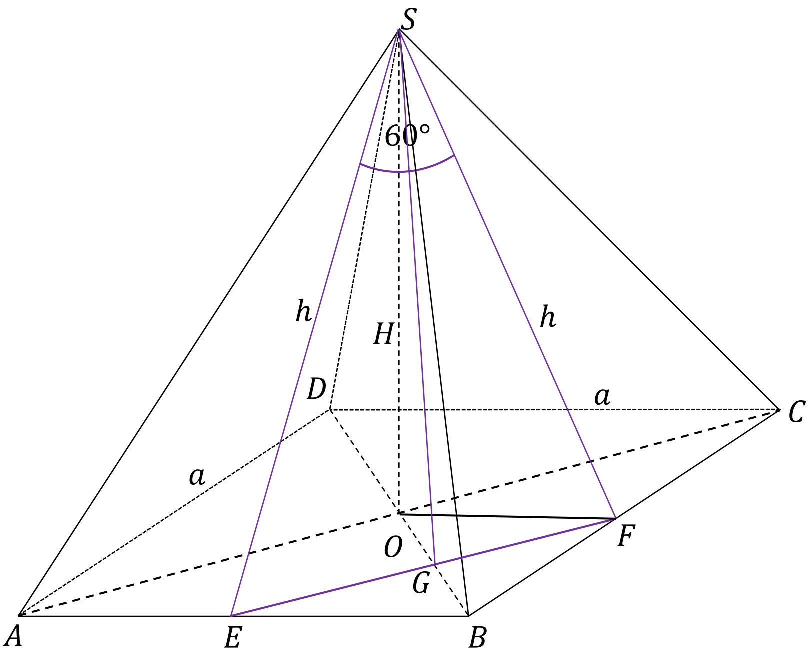
h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka S,

H – wysokość ostrosłupa,

O – punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$,

SE, SF – wysokości sąsiednich ścian bocznych,

SG – wysokość trójkąta SEG poprowadzona z wierzchołka S.



Wyznaczamy wysokość h ściany bocznej ostrosłupa $ABCDS$ poprowadzonej z wierzchołka S w zależności od długości a krawędzi podstawy ostrosłupa:

$$\sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} ah$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2a}$$

Ponieważ $\alpha = 30°$, więc trójkąt równoramienny ESF jest równoboczny. Zatem $h = |EF| = \sqrt{2} \cdot |EB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Stąd

$$\frac{\sqrt{2}}{2a} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 1$$

więc

$$h^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2a}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta FOS i obliczamy wysokość H ostrosłupa $ABCDS$:

$$|OS|^2 = |FS|^2 - |OF|^2$$

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$H^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$H = \frac{1}{2}$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa $ABCDS$:

$$V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3}\cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Z treści zadania wiadomo, że $V = \sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos(2\alpha)}$ ·, więc $V = \sqrt{k \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$.

Porównując otrzymane wartości objętości, obliczamy k:

$$\frac{1}{6} = \sqrt{k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{36}$$

Współczynnik k ma wartość $\frac{\sqrt{2}}{36}$.

Sposób 2.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

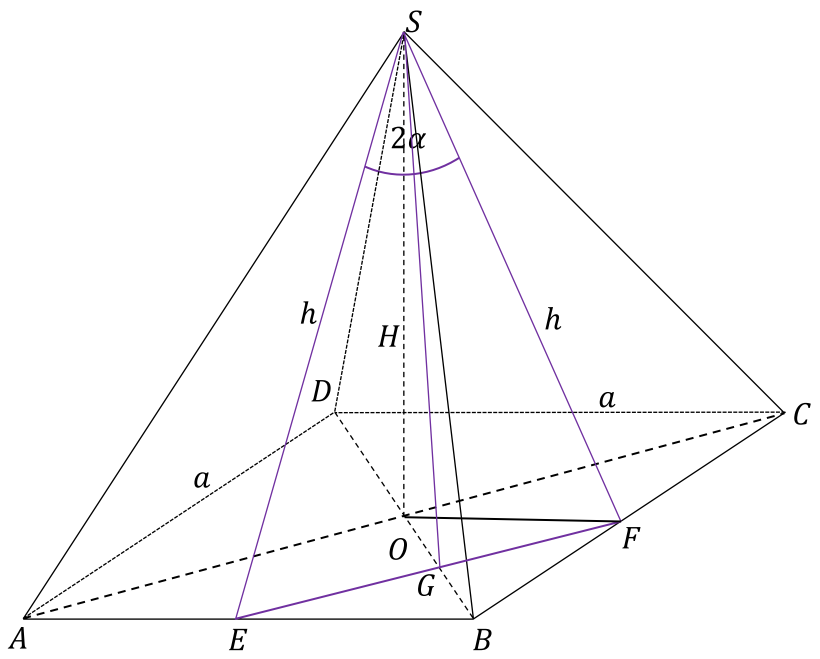
h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka S,

H – wysokość ostrosłupa,

O – punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$,

SE, SF – wysokości sąsiednich ścian bocznych,

SG – wysokość trójkąta SEG poprowadzona z wierzchołka S.



Wyznaczamy wysokość h ściany bocznej ostrosłupa $ABCDS$ poprowadzonej z wierzchołka S w zależności od długości a krawędzi podstawy ostrosłupa:

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} ah$$

$$h = \frac{P}{2a}$$

Ponieważ $|EF| = \sqrt{2} \cdot |EB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, więc $|EG| = \frac{1}{2}|EF| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Zatem

$$\frac{|EG|}{|ES|} = \sin\alpha$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{P}{2a}} = \sin\alpha$$

$$a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin\alpha$$

Stąd

$$h^2 = \left(\frac{P}{2a}\right)^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin\alpha}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta FOS i obliczamy wysokość H ostrosłupa $ABCDS$:

$$|OS|^2 = |FS|^2 - |OF|^2$$

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$H^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin\alpha} - \frac{\sqrt{2}P \cdot \sin\alpha}{4}$$

$$H^2 = \frac{P(1 - 2\sin^2\alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin\alpha}$$

$$H = \sqrt{\frac{P \cdot \cos(2\alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin\alpha}}$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa $ABCDS$:

$$V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}P \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{P\cos(2\alpha)}{4\sqrt{2}\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{36} \cdot P^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos(2\alpha)}$$

Zatem $k = \frac{\sqrt{2}}{36}$.

Zadanie 11. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) (R) stosuje schemat Bernoullego.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa zaliczenia egzaminu przez studenta i poprawny wynik: $\frac{123841}{4^{15}}$.

3 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach i skorzystanie z addytywności prawdopodobieństwa dla zdarzeń parami rozłącznych.

2 pkt – wyznaczenie zdarzenia odpowiadającego zaliczeniu egzaminu za pomocą zdarzeń S_{15}^{k} , gdzie $k \in \{11, 12, 13, 14, 15\}$: $S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15}$.

1 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Próbą Bernoullego jest losowe wybranie przez studenta odpowiedzi w zadaniu. Sukcesem w tej próbie jest wybranie odpowiedzi, która jest poprawna.

Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $p = 0{,}25$, natomiast prawdopodobieństwo porażki jest równe $q = 0{,}75$.

Niech S_{15}^{k} oznacza zdarzenie polegające na wybraniu przez studenta poprawnych odpowiedzi w dokładnie k zadaniach spośród 15.

Korzystamy ze schematu Bernoullego. Prawdopodobieństwo zaliczenia przez studenta egzaminu jest równe $P(S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15})$. Zdarzenia $S_{15}^{11}, S_{15}^{12}, S_{15}^{13}, S_{15}^{14}, S_{15}^{15}$ są parami rozłączne, więc

$$P\left(S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15}\right) = P(S_{15}^{11}) + P(S_{15}^{12}) + P(S_{15}^{13}) + P(S_{15}^{14}) + P\left(S_{15}^{15}\right) =$$

$$= \binom{15}{11} \cdot (0{,}25)^{11} \cdot (0{,}75)^{4} + \binom{15}{12} \cdot (0{,}25)^{12} \cdot (0{,}75)^{3} + \binom{15}{13} \cdot (0{,}25)^{13} \cdot (0{,}75)^{2} +$$

$$+ \binom{15}{14} \cdot (0{,}25)^{14} \cdot (0{,}75)^{1} + \binom{15}{15} \cdot (0{,}25)^{15} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot (1365 \cdot 81 + 455 \cdot 27 + 105 \cdot 9 + 15 \cdot 3 + 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot 123841 \approx 0{,}00012$$

Prawdopodobieństwo zaliczenia przez studenta egzaminu jest równe $\frac{123841}{1024^{3}}$.