

| | |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Rodzaj dokumentu:</i> | Zasady oceniania rozwiązań zadań |
| <i>Egzamin:</i> | Egzamin maturalny Arkusz pokazowy |
| <i>Przedmiot:</i> | Matematyka |
| <i>Poziom:</i> | Poziom podstawowy |
| <i>Formy arkusza:</i> | MMAP-P0-100, MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-660, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00 |
| <i>Data publikacji dokumentu:</i> | 18 marca 2022 r. |

Uwagi:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

2. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 ¹ | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
| I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Zdający: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

¹ Komunikat o wymaganiach egzaminacyjnych obowiązujących w roku 2023 i 2024, <https://www.gov.pl/web/edukacja-i-nauka/wymagania-egzaminacyjne-obowiazujace-na-egzaminie-maturalnym-w-roku-2023-i-2024>

Zadanie 2. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 3. (0-1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...]. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 4. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 5. (0–2)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych. VIII.4) korzysta z własności kątów [...]. |

Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: B i E.

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: B albo E.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

BE

Zadanie 6. (0–1)

| Wymagania ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| <p>I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.</p> <p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.</p> | <p>Zdający: V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.</p> |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 7. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.</p> | <p>Zdający: III.6) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.</p> |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 8. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej; I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $ x + 4 = 5$, $ x - 2 < 3$, $ x + 3 \geq 4$. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 9. (0–2)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia [...]. |

Zasady oceniania

dla sposobów 1. i 2.

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu, tzn.:

przekształcenie wyrażenia $(2k + 1)^2 + 2023$ do postaci $4 \cdot m(k)$ oraz

uzasadnienie, że $m(k)$ jest liczbą parzystą

LUB

przekształcenie wyrażenia $(2k + 1)^2 + 2023$ do postaci sumy składników, z których każdy jest liczbą podzielną przez 8 i uzasadnienie podzielności przez 8 każdego składnika

LUB

uzasadnienie podzielności przez 8 wyrażen $(4k - 1)^2 + 2023$ oraz $(4k + 1)^2 + 2023$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

LUB

zapisanie liczby $n^2 + 2023$ w postaci $n^2 - 1 + 8 \cdot 253$ i uzasadnienie, że $n^2 - 1$ jest liczbą podzielną przez 8.

1 pkt – zapisanie liczby n w postaci $n = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, i przekształcenie wyrażenia $(2k + 1)^2 + 2023$ do $4k^2 + 4k + 1 + 2023$ lub $(2k + 1)^2 - 1 + 2024$

LUB

przeprowadzenie pełnego dowodu dla n postaci $4k - 1$ (lub $4k + 1$), gdzie $k \in \mathbb{Z}$

LUB

przeprowadzenie pełnego dowodu dla dwóch lub trzech przypadków spośród:

 $n = 8k + 1$, $n = 8k + 3$, $n = 8k + 5$, $n = 8k + 7$ (gdzie $k \in \mathbb{Z}$)

LUB

zapisanie liczby $n^2 + 2023$ w postaci $n^2 - 1 + 8 \cdot 253$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający stosuje metodę indukcji i przeprowadzi dowód tylko dla liczb dodatnich/ujemnych, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Niech n będzie liczbą całkowitą nieparzystą. Wtedy $n = 2k + 1$ przy pewnym $k \in \mathbb{Z}$, więc $n^2 + 2023 = (2k + 1)^2 + 2023 = 4k^2 + 4k + 1 + 2023 = 4k(k + 1) + 2024$.

Jeżeli k jest liczbą parzystą, to liczba $4k(k + 1)$ jest podzielna przez 8 jako iloczyn liczby 4, liczby parzystej k i liczby całkowitej $k + 1$.

Jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to liczba $4k(k + 1)$ jest podzielna przez 8 jako iloczyn liczby 4, liczby parzystej $k + 1$ i liczby całkowitej k .

Liczba 2024 jest podzielna przez 8, gdyż $2024 = 8 \cdot 253$.

Zatem liczba $4k(k + 1) + 2024$ jest podzielna przez 8 jako suma liczb podzielnych przez 8. To kończy dowód.

Sposób 2.

Zauważmy, że $n^2 + 2023 = n^2 - 1 + 2024 = (n - 1)(n + 1) + 8 \cdot 253$.

Ponieważ n jest liczbą całkowitą nieparzystą, to $n - 1$ i $n + 1$ to dwie kolejne liczby parzyste. Zatem jedna z tych liczb jest podzielna przez 4. Stąd wynika, że iloczyn

$(n - 1)(n + 1)$ jest podzielny przez $2 \cdot 4 = 8$. Suma dwóch liczb podzielnych przez 8 jest podzielna przez 8. To kończy dowód.

Zadanie 10.1. (0–1)

| Wymagania ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$ [...]. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 10.2. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. | Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane. |

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

$(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

Zadanie 10.3. (0–3)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje); V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie. |

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia (lub wyznaczenia) współczynnika a i zapisanie wzoru funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$.

2 pkt – zapisanie poprawnego równania z jedną niewiadomą a

LUB

zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$ bez uzasadnienia, że $a = -2$.

1 pkt – poprawne odczytanie z wykresu współrzędnych wierzchołka paraboli i zapisanie $f(x) = a(x - 1)^2 + 8$ (lub zapisanie $f(x) = a(x - 1)^2 + 8$ z arbitralnie przyjętym współczynnikiem $a \neq -2$)

LUB

poprawne odczytanie z wykresu miejsc zerowych funkcji f i zapisanie

$$f(x) = a(x + 1)(x - 3)$$

LUB

zapisanie wzoru funkcji f w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$ i zapisanie trzech poprawnych równań z niewiadomymi a , b oraz c .

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający błędnie odczyta jedną współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający błędnie odczyta jedną współrzędną wierzchołka lub innego punktu należącego do wykresu funkcji f i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze równanie z jedną niewiadomą a , i na tym zakończy, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej i zapisujemy

$$f(x) = a(x - p)^2 + q.$$

Odczytujemy z wykresu funkcji f współrzędne wierzchołka paraboli: $p = 1$ oraz $q = 8$.

Zatem $f(x) = a(x - 1)^2 + 8$.

Z wykresu odczytujemy jedno z miejsc zerowych funkcji f , np. $x = -1$. Ponieważ $f(-1) = 0$, więc

$$0 = a(-1 - 1)^2 + 8$$

$$a = -2$$

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$.

Zadanie 11. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. | Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 12. (0–1)

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Zdający: V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach; V.11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 13.1 (0–1)

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie; V.13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 13.2 (0–3)

| Wymagania ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Zdający: VI.5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. |

Zasady oceniania

dla sposobów 1. i 2.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia masy leku tuż przed przyjęciem jedenastej dawki i poprawny wynik: 99,9 mg.

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na sumę początkowych kolejnych wyrazów ciągu

geometrycznego i zapisanie sumy w postaci $100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}}$

LUB

wypisanie wszystkich mas leku pozostających w organizmie tuż przed przyjęciem jedenastej dawki (z kolejno przyjmowanych dawek) albo mas leku pozostałych z przyjęcia pierwszej dawki po kolejnych okresach czterodniowych i zastosowanie bezpośredniego zsumowania wyrazów, np.:

$$50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 + 1,56 + 0,781 + 0,391 + 0,195 + 0,098$$

LUB

poprawne obliczenie masy leku pozostającego w organizmie po 4, 8, 12 itd. dniach (tuż przed przyjęciem kolejnej dawki): 50 mg, 75 mg, 87,5 mg, itd.

LUB

poprawne obliczenie masy leku pozostającego w organizmie tuż po przyjęciu kolejnych dawek leku: 100 mg, 150 mg, 175 mg, 187,5 mg, itd.

1 pkt – poprawne wyznaczenie mas leku, jakie pozostały w organizmie z poszczególnych dawek na moment przed przyjęciem jedenastej dawki:

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \text{ mg}, 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \text{ mg}, 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \text{ mg}, \dots, 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \text{ mg}$$

LUB

obliczenie poszczególnych mas leku pozostających w organizmie przed przyjęciem jedenastej dawki: 50 mg (z dziesiątej dawki), 25 mg (z dziewiątej dawki), ..., 0,098 mg (z pierwszej dawki)

LUB

zapisanie sumy $m(4) + m(8) + \dots + m(40)$

LUB

obliczenie mas leku pozostałych z przyjęcia pierwszej dawki po kolejnych okresach czterodniowych: 50 mg, 25 mg, ..., 0,098 mg.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający poprawnie określa masę leku w organizmie tuż po przyjęciu kolejnych dawek (lub tuż przed przyjęciem kolejnych dawek), lecz popełnia błąd przy ustaleniu liczby przyjętych dawek i konsekwentnie doprowadza rozwiązanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający przy sumowaniu mas leku, jakie pozostały w organizmie z poszczególnych dawek na moment przed przyjęciem jedenastej dawki, określi pierwszy wyraz ciągu jako 100 i konsekwentnie doprowadza rozwiązanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Pacjent przyjmuje jedenastą dawkę leku po 40 dniach, licząc od momentu przyjęcia pierwszej dawki.

Tuż przed przyjęciem jedenastej dawki leku w organizmie pacjenta znajduje się:

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \text{ mg leku z pierwszej dawki,}$$

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \text{ mg leku z drugiej dawki,}$$

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$ mg leku z trzeciej dawki,

⋮

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ mg leku z dziewiątej dawki,

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$ mg leku z dziesiątej dawki.

Łącznie w organizmie pacjenta znajduje się

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 100 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) \approx 99,9 \text{ mg leku.}$$

Sposób 2.

Obliczamy i zapisujemy w lewej tabeli łączną masę leku (w mg), który jest w organizmie pacjenta tuż po przyjęciu każdej kolejnej dawki 100 mg tego leku.

W prawej tabeli obliczamy i zapisujemy masę leku (w mg), który pozostaje w organizmie pacjenta tuż przed przyjęciem kolejnej dawki, z uwzględnieniem czasu półtrwania tego leku ($T = 4$ doby) w organizmie pacjenta.

| tuż po przyjęciu | |
|------------------|--------|
| 1. dawki | 100 |
| 2. dawki | 150 |
| 3. dawki | 175 |
| 4. dawki | 187,5 |
| 5. dawki | 193,75 |
| 6. dawki | 196,88 |
| 7. dawki | 198,44 |
| 8. dawki | 199,22 |
| 9. dawki | 199,61 |
| 10. dawki | 199,81 |

| tuż przed przyjęciem | |
|----------------------|-----------|
| 50 | 2. dawki |
| 75 | 3. dawki |
| 87,5 | 4. dawki |
| 93,75 | 5. dawki |
| 96,88 | 6. dawki |
| 98,44 | 7. dawki |
| 99,22 | 8. dawki |
| 99,61 | 9. dawki |
| 99,81 | 10. dawki |
| 99,9 | 11. dawki |

Zatem tuż przed przyjęciem jedenastej dawki łączna masa tego leku w organizmie pacjenta jest równa 99,9 mg.

Zadanie 14. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Zdający: I.8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych z kapitalizacją roczną i zysków z lokat. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 15. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. | Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; VI.3) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Zadanie 16. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. | Zdający: VII.3) stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PP

Zadanie 17. (0-1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 18. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów. |

Zasady oceniania

1 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz zapisanie wyniku: $|OD| = 6$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OCD|$ (z założenia), $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle COD|$ (jako miary kątów wierzchołkowych) oraz $|\sphericalangle ABO| = |\sphericalangle CDO|$ (z twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie), więc trójkąty ABO i ODC są podobne na mocy cechy kkk podobieństwa trójkątów.

Zatem

$$\frac{|CO|}{|AO|} = \frac{|OD|}{|OB|}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{|OD|}{3}$$

$$|OD| = 6$$

Długość boku OD trójkąta ODC jest równa 6.

Zadanie 19. (0–2)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu). |

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne dokończenia dwóch zdań.

1 pkt – poprawne dokończenie jednego zdania.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1. B 2. E

Zadanie 20. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 21. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: VII.4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych [...]. VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 22. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 23. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. | Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A2

Zadanie 24. (0–1)

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych; 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu. | Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych; VIII.7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 25. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 26. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: X.5) wykorzystuje zależność między objętościami graniastosłupów oraz ostrosłupów podobnych. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 27. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający: X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną; X.3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), oblicza miary tych kątów. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 28. (0–3)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja. 2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności. | Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...]. XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym. |

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i podanie

poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{9000}$.

2 pkt – obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych i liczby wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $|\Omega| = 9000$, $|A| = 10$.

1 pkt – obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 9999 - 999 = 9\,000$
LUB

wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niezapisanie żadnego niewłaściwego:

$$1011, 1101, 1110, 1002, 1020, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000$$

LUB

obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A :
 $|A| = 10$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisze tylko $P(A) = \frac{10}{9000}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ losy są ponumerowane kolejno od 1000 do 9999, więc początkowa liczba wszystkich losów na tej loterii jest równa $9999 - 999 = 9000$. Zatem $|\Omega| = 9000$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że pierwszy wylosowany z pojemnika los był wygrywający. Wtedy

$$A = \{1011, 1101, 1110, 1002, 1020, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000\}, \text{ więc } |A| = 10.$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{9000} = \frac{1}{900}$$

Zadanie 29. (0–4)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Zdający: XIII. rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową. |

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia długości boków równoległoboku o największym polu, poprawne wyznaczenie dziedziny funkcji P , oraz podanie prawidłowych wyników:
 $D = (0, 100)$, $x = 50$, $b = 50$ oraz $P(50) = 1250$.

3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole P równoległoboku w zależności od jednej zmiennej, wyznaczenie dziedziny D tej funkcji oraz prawidłowe obliczenie argumentu x_{opt} , dla którego funkcja pola osiąga wartość największą:

$$P(x) = x \cdot (100 - x) \cdot \frac{1}{2}, \quad D = (0, 100), \quad x_{opt} = 50.$$

LUB

poprawna metoda obliczenia długości boków równoległoboku o największym polu oraz podanie prawidłowych wyników bez wyznaczonej dziedziny: $x = 50$, $b = 50$ oraz $P(50) = 1250$.

2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole równoległoboku w zależności od jednej zmiennej:

$$P(x) = x \cdot (100 - x) \cdot \frac{1}{2}.$$

1 pkt – zapisanie wzoru na pole równoległoboku w zależności od długości dwóch sąsiednich boków równoległoboku, np.: $P = x \cdot b \cdot \sin 30^\circ$

LUB

zapisanie związku między długościami boków równoległoboku, np.: $2x + 2b = 200$

LUB

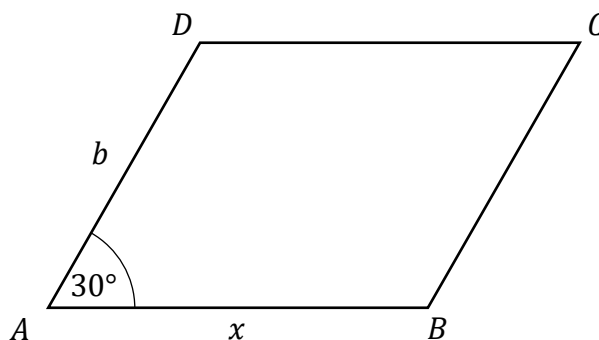
zapisanie zakresu zmienności długości x boku równoległoboku, np.

$$x > 0 \text{ i } x < 100.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez x oraz b długości boków równoległoboku o obwodzie równym 200 i kącie ostrym o mierze 30° (zobacz rysunek).



Ponieważ $2x + 2b = 200$ oraz $x > 0$ i $b > 0$, więc $b = 100 - x$ i $x \in (0, 100)$.

Wyznaczamy pole P równoległoboku jako funkcję jednej zmiennej x :

$$P = x \cdot b \cdot \sin 30^\circ$$

$$P(x) = x \cdot (100 - x) \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 50x$$

dla $x \in (0, 100)$.

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja P może osiągnąć wartość największą dla argumentu równego pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, tj. dla $x = -\frac{50}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 50$. Ponieważ

$50 \in (0, 100)$, więc funkcja P osiąga wartość największą dla argumentu $x = 50$. Wtedy

$$b = 100 - x = 100 - 50 = 50 \text{ oraz } P(50) = 50 \cdot (100 - 50) \cdot \frac{1}{2} = 1250.$$

Z rozważanych równoległoboków największe pole – równe 1250 – ma ten, który jest rombem o boku długości 50.

Zadanie 30.1. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. | Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PP

Zadanie 30.2. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. | Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę. |

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B