

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

|  |  |
| --- | --- |
| **WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY** | ***Miejsce na naklejkę.****Sprawdź, czy kod na naklejce to***E-660**. |
|  |
|  **KOD PESEL** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Egzamin maturalny** | ***Formuła 2015*** |
|  |
| **MATEMATYKA** |
| **Poziom rozszerzony** |
| *Symbol arkusza***E**MAP-R0-**660**-2305 |

Data: **12 maja 2023 r.**

|  |
| --- |
| **WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY** |
| Uprawnienia zdającego do:

|  |  |
| --- | --- |
|  | dostosowania zasad oceniania |

|  |  |
| --- | --- |
|  | dostosowania w zw. z dyskalkulią |

|  |  |
| --- | --- |
|  | nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę. |

  |

Godzina rozpoczęcia: **9:00**

Czas trwania: **do 270 minut**

Liczba punktów do uzyskania: **50**

**Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym**

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

**Instrukcja dla zdającego**

1. Arkusz zawiera 16 zadań.
2. Obok każdego numeru zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
3. Odpowiedzi zapisuj na kartkach dołączonych do arkusza, na których zespół nadzorujący wpisał Twój numer PESEL.
4. W rozwiązaniach zadań otwartych przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. W razie pomyłki błędny zapis zapunktuj.
6. Możesz korzystać z „Wybranych wzorów matematycznych”, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



W zadaniach od 1. do 4. zapisz po numerze zadania poprawną odpowiedź.

 Zadanie 1. (0–1)

 Granica

$\lim\_{x\to 1} \frac{x^{3}-1}{(x-1)(x+2)}$

jest równa

A. $-1$

B. $0$

C. $\frac{1}{3}$

D. $1$

 Zadanie 2. (0–1)

 Dane są wektory

$\vec{u}=\left[4,-5\right]$ oraz $\vec{v}=\left[-1,-5\right]$.

Długość wektora $\vec{u}-4\vec{v}$ jest równa

A. $7$

B. $15$

C. $17$

D. $23$

 Zadanie 3. (0–1)

 Punkty $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ leżą na okręgu o środku $S$. Miara kąta $BCD$ jest równa $110°$, a miara kąta $BDA$ jest równa $35°$ (jak na rysunku).

Wtedy miara $α$ kąta $DEA$ jest równa

A. $100°$

B. $105°$

C. $110°$

A

B

C

D

E

S

α

$$α$$

D. $115°$

 Zadanie 4. (0–1)

 Dany jest zbiór trzynastu kolejnych liczb naturalnych

 $\left\{1, 2, 3, …,11, 12, 13\right\}$,

z którego losujemy jednocześnie dwie liczby.

Wszystkich różnych sposobów wylosowania z tego zbioru dwóch liczb, których iloczyn jest liczbą parzystą, jest

A. $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{2}\right)+49$

B. $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{1}\right)⋅\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{1}\right)+49$

C. $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{13}{2}\right)-\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{2}\right)$

D. $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{13}{2}\right)-\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{2}\right)$

W zadaniach od 5. do 16. zapisz rozwiązania. Pamiętaj o podaniu numeru zadania.

 Zadanie 5. (0–2)

 Wielomian $W\left(x\right)=7x^{3}-9x^{2}+9x-2$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Oblicz ten pierwiastek.

Zapisz trzy kolejne cyfry – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku. Rozwiązanie tego zadania będzie uznane, jeśli podasz poprawne cyfry.

 Zadanie 6. (0–3)

 Liczby rzeczywiste $x$ oraz $y$ spełniają jednocześnie równanie $x+y=4$ i nierówność

$x^{3}-x^{2}y\leq xy^{2}-y^{3}$.

Wykaż, że $x=2$ oraz $y=2$.

 Zadanie 7. (0–3)

 Dany jest trójkąt prostokątny $ABC$, w którym $\left|∡ABC\right|=90°$ oraz $\left|∡CAB\right|=α=60°$. Punkty $K$ i $L$ leżą na bokach – odpowiednio – $AB$ i $BC$ tak, że $\left|BK\right|=\left|BL\right|=1$ (jak na rysunku). Odcinek $KL$ przecina wysokość $BD$ tego trójkąta w punkcie $N$, a ponadto $\left|AD\right|=2$.

α

A

K

N

1

2

D

B

L

C

1

Wykaż, że $\left|ND\right|=\sqrt{3}+1$.

 Zadanie 8. (0–3)

 W pojemniku jest siedem kul: pięć kul białych i dwie kule czarne. Z tego pojemnika losujemy jednocześnie dwie kule bez zwracania. Następnie – z kul pozostałych w pojemniku – losujemy jeszcze jedną kulę.

Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej w drugim losowaniu.

 Zadanie 9. (0–3)

 Funkcja $f$ jest określona wzorem

$f\left(x\right)=\frac{3x^{2}-2x}{x^{2}+2x+8}$

dla każdej liczby rzeczywistej $x$. Punkt $P=\left(x\_{0},3\right)$ należy do wykresu funkcji $f$.

Oblicz $x\_{0}$ oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f$ w punkcie $P$.

 Zadanie 10. (0–4)

 Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^{2}+4x+4}<\frac{25}{3}-\sqrt{x^{2}-6x+9}$$

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^{2}}=\left|a\right|$ dla każdej liczby rzeczywistej $a$.

 Zadanie 11. (0–4)

 Określamy kwadraty $K\_{1}$, $K\_{2}$, $K\_{3}$, … następująco:

–$ K\_{1}$ jest kwadratem o boku długości $a$

– $K\_{2}$ jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu $K\_{1}$ i dzieli ten bok w stosunku $1 :3$

– $K\_{3}$ jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu $K\_{2}$ i dzieli ten bok w stosunku $1 :3$

i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n\geq 2$,

– $K\_{n}$ jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu $K\_{n-1}$ i dzieli ten bok w stosunku $1 :3$.

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny.

Na rysunku przedstawiono kilka początkowych kwadratów utworzonych w sposób opisany powyżej.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu.

a

a

 Zadanie 12. (0–4)

 Rozwiąż równanie

$3sin^{2}x-sin^{2}\left(2x\right)=0$

w przedziale $\left〈π, 2π\right〉$.

 Zadanie 13. (0–4)

 Czworokąt $ABCD$, w którym $\left|BC\right|=4$ i $\left|CD\right|=5$, jest opisany na okręgu. Przekątna $AC$ tego czworokąta tworzy z bokiem $BC$ kąt o mierze $60°$, natomiast z bokiem $AB$ – kąt ostry, którego sinus jest równy $\frac{1}{4}$ (jak na rysunku).

Oblicz obwód czworokąta $ABCD$.

A

B

C

D

4

5

 Zadanie 14. (0–4)

 Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości $6$. Punkt $S$ jest punktem przecięcia przekątnych $AH$ i $DE$ ściany bocznej $ADHE$.

Oblicz wysokość trójkąta $SBH$ poprowadzoną z punktu $S$ na bok $BH$ tego trójkąta.

Wskazówka: rysunek przedstawia przekrój $ABGH$ sześcianu $ABCDEFGH$.

A

B

H

G

S

6

 Zadanie 15. (0–5)

 Wyznacz wszystkie wartości parametru $m\ne 2$, dla których równanie

$$x^{2}+4x-\frac{m-3}{m-2}=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste $x\_{1}$, $x\_{2}$ spełniające warunek

$x\_{1}^{3}+x\_{2}^{3}>-28$.

 Zadanie 16. (0–7)

 Rozważamy trójkąty $ABC$, w których $A=\left(0, 0\right)$, $B=\left(m,0\right)$, gdzie $m\in (4,+\infty )$, a wierzchołek $C$ leży na prostej o równaniu $y=-2x$. Na boku $BC$ tego trójkąta leży punkt $D=\left(3, 2\right)$.

a) Wykaż, że dla $m\in (4,+\infty )$ pole $P$ trójkąta $ABC$, jako funkcja zmiennej $m$, wyraża się wzorem
$$P\left(m\right)=\frac{m^{2}}{m-4}$$

b) Oblicz tę wartość $m$, dla której funkcja $P$ osiąga wartość najmniejszą. Wyznacz równanie prostej $BC$, przy której funkcja $P$ osiąga tę najmniejszą wartość.

Koniec

**MATEMATYKA**

**Poziom rozszerzony**

*Formuła 2015*

**MATEMATYKA**

**Poziom rozszerzony**

*Formuła 2015*

**MATEMATYKA**

**Poziom rozszerzony**

*Formuła 2015*