INFORMATOR
o egzaminie eksternistycznym z matematyki
z zakresu branżowej szkoły II stopnia

od sesji jesiennej 2024 r.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2022

Zespół redakcyjny:
Grażyna Miłkowska (CKE)
Ewa Ludwikowska (OKE Gdańsk)
Mariusz Mroczek (CKE)
dr Wioletta Kozak (CKE)

Recenzenci:
prof. dr hab. Zbigniew Marciniak (UW)
Grażyna Śleszyńska (recenzja nauczycielska)
dr Tomasz Karpowicz (recenzja językowa)

Informator został opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00
sekretariat@cke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. 58 320 55 90
komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 616 33 99
oke@oke.jaworzno.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. 12 683 21 99
oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
Al. Legionów 9, 18-400 Łomża
tel. 86 473 71 20
sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi
ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. 42 634 91 33
sekretariat@lodz.oke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. 61 854 01 60
sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie
pl. Europejski 3, 00-844 Warszawa
tel. 22 457 03 35
info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu
ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. 71 785 18 94
sekretariat@oke.wroc.pl

Spis treści

1. Opis egzaminu eksternistycznego z matematyki z zakresu branżowej szkoły II stopnia

WSTĘP

Matematyka jest jednym z przedmiotów obowiązkowych na egzaminie eksternistycznym z zakresu branżowej szkoły II stopnia.

Egzamin eksternistyczny z matematyki z zakresu branżowej szkoły II stopnia sprawdza, w jakim stopniu zdający spełnia wymagania określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej[1].

Informator prezentuje przykładowy arkusz egzaminacyjny wraz z zasadami oceniania rozwiązań zadań. Do każdego zadania dodano wykaz wymagań ogólnych i szczegółowych z podstawy programowej kształcenia ogólnego, którym odpowiada dane zadanie. *Informator* stanowi przy tym jedynie ogólną, kierunkową pomoc w planowaniu procesu samokształcenia. Zadania nie ilustrują wszystkich wymagań z zakresu matematyki określonych w podstawie programowej, nie wyczerpują również wszystkich typów zadań, które mogą wystąpić w arkuszu egzaminacyjnym. Tylko realizacja wszystkich wymagań z podstawy programowej, zarówno ogólnych, jak i szczegółowych, może zapewnić właściwe przygotowanie do egzaminu eksternistycznego z matematyki.

ZADANIA NA EGZAMINIE

W arkuszu egzaminacyjnym znajdą się zarówno zadania zamknięte, jak i otwarte.

Zadania zamknięte to takie, w których zdający wybiera odpowiedź spośród podanych. Wśród zadań zamkniętych znajdą się m.in.:
- zadania wyboru wielokrotnego
- zadania typu prawda – fałsz
- zadania na dobieranie.

Zadania otwarte to takie, w których zdający samodzielnie formułuje odpowiedź. Wśród zadań otwartych znajdą się m.in.:
- zadania z luką, wymagające uzupełnienia zdania albo zapisania odpowiedzi jednym lub kilkoma wyrazami, symbolami lub wyrażeniami matematycznymi określającymi własności obiektów matematycznych, w tym – wykonania lub uzupełnienia wykresu, zależności, diagramu, tabeli
- zadania krótkiej odpowiedzi, wymagające wykonania prostego obliczenia lub bezpośredniego zapisania rozwiązania albo zapisania przeprowadzonego rozumowania lub obliczenia – zwykle w dwóch lub trzech etapach

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2018 r. poz. 467, z późn. zm.).

- zadania rozszerzonej odpowiedzi, wymagające utworzenia strategii rozwiązania problemu matematycznego i przedstawienia jej realizacji.

Przedstawione przez zdającego rozwiązanie zadania otwartego, w którym zdający m.in. oblicza, wyznacza, wyprowadza, uzasadnia, wykazuje, musi prezentować pełny tok rozumowania, uwzględniać warunki zadania, a także odwoływać się do twierdzeń matematycznych i własności odpowiednich obiektów matematycznych.

Wszystkie zadania egzaminacyjne będą sprawdzały poziom opanowania umiejętności określonych w następujących wymaganiach ogólnych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej (w nawiasach zapisano numery celów kształcenia z podstawy programowej):

- sprawność rachunkowa (I)
- wykorzystanie i tworzenie informacji (II)
- wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (III)
- rozumowanie i argumentacja (IV).

Zadania egzaminacyjne będą dotyczyły obszarów tematycznych matematyki wymienionych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla III etapu edukacyjnego. Są to:

I. Liczby rzeczywiste
II. Wyrażenia algebraiczne
III. Równania
IV. Układy równań
V. Funkcje
VI. Ciągi
VII. Trygonometria
VIII. Planimetria
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej
X. Stereometria
XI. Kombinatoryka
XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka
XIII. Optymalizacja.

OPIS ARKUSZA EGZAMINACYJNEGO

Egzamin eksternistyczny z matematyki trwa **120 minut**[2].

W arkuszu egzaminacyjnym będą występowały pojedyncze zadania lub wiązki zadań. Wiązka zadań może zawierać od dwóch do czterech zadań występujących we wspólnym kontekście. Wiązka zadań może się składać z zadań zamkniętych i zadań otwartych. Niektóre zadania będą wymagały skorzystania z zamieszczonych w arkuszu rysunków, wykresów, diagramów lub tabel.

Liczbę zadań w arkuszu egzaminacyjnym oraz liczbę punktów możliwych do uzyskania za poszczególne rodzaje zadań przedstawiono w poniższej tabeli.

Rodzaj zadania	Liczba zadań	Łączna liczba punktów	Udział w wyniku sumarycznym
zamknięte	17–22	ok. 20	ok. 50%
otwarte	6–10	ok. 20	ok. 50%
RAZEM	**23–32**	**40**	**100%**

Zdający rozwiązuje zadania bezpośrednio w arkuszu egzaminacyjnym.

ZASADY OCENIANIA

Zadania zamknięte

Zadania zamknięte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

ALBO

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.
1 pkt – odpowiedź częściowo poprawna lub odpowiedź niepełna.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadania otwarte

Za w pełni poprawne rozwiązanie zadania otwartego będzie można otrzymać maksymalnie 1, 2, 3 lub 4 punkty. Za każde rozwiązanie inne niż opisane w zasadach oceniania można otrzymać maksymalną liczbę punktów, o ile rozwiązanie jest merytorycznie poprawne, zgodne z poleceniem i warunkami zadania.

---

[2] Czas trwania egzaminu może zostać wydłużony w przypadku zdających ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, w tym niepełnosprawnych. Szczegóły są określane w *Komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w sprawie szczegółowych sposobów dostosowania warunków i form przeprowadzania egzaminu eksternistycznego* dla danej sesji egzaminacyjnej.

Zadania otwarte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

Zadania otwarte z luką

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 1 pkt:

  1 pkt – rozwiązanie poprawne.
  0 pkt – rozwiązanie niepełne lub niepoprawne albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 2 pkt:

  2 pkt – rozwiązanie całkowicie poprawne.
  1 pkt – rozwiązanie częściowo poprawne lub rozwiązanie niepełne.
  0 pkt – rozwiązanie całkowicie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 1 pkt:

  1 pkt – rozwiązanie poprawne.
  0 pkt – rozwiązanie niepełne lub niepoprawne albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 2 pkt:

  2 pkt – rozwiązanie poprawne.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 3 pkt:

  3 pkt – rozwiązanie poprawne.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym dokonany został istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 4 pkt:

  4 pkt – rozwiązanie poprawne.
  3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania.

Etapy rozwiązania dla każdego zadania (niewielki postęp, istotny postęp, zasadnicze trudności zadania) będą opisane w zasadach oceniania dla danego zadania. Ponadto dla różnych sposobów rozwiązania danego zadania te same etapy będą opisywały w zasadach oceniania jakościowo równoważny postęp na drodze do rozwiązania zadania.

MATERIAŁY I PRZYBORY POMOCNICZE NA EGZAMINIE Z MATEMATYKI

Przybory pomocnicze, z których mogą korzystać zdający na egzaminie eksternistycznym z matematyki, to:

- linijka
- cyrkiel
- kalkulator prosty*
- *Zestaw wybranych wzorów matematycznych.*

* Kalkulator prosty – jest to kalkulator, który umożliwia wykonywanie tylko dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, ewentualnie obliczanie procentów lub pierwiastków kwadratowych z liczb.

Szczegółowe informacje dotyczące materiałów i przyborów pomocniczych, z których mogą korzystać zdający na egzaminie eksternistycznym z matematyki (w tym osoby, którym dostosowano warunki przeprowadzania egzaminu), będą ogłaszane w komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.

2. Przykładowy arkusz egzaminacyjny z zasadami oceniania rozwiązań zadań

W *Informatorze* zamieszczono *Przykładowy arkusz egzaminacyjny* oraz *Zasady oceniania rozwiązań zadań*. Przy każdym zadaniu w arkuszu – po numerze zadania – podano maksymalną liczbę punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie. W *Zasadach oceniania rozwiązań zadań* dla każdego zadania podano:

- wymagania ogólne i szczegółowe z podstawy programowej, które są sprawdzane w tym zadaniu
- zasady oceniania rozwiązania tego zadania
- poprawne rozwiązanie każdego zadania zamkniętego oraz przykładowe rozwiązanie każdego zadania otwartego.

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

PESEL *(wypełnia zdający)*	**DMAP–100–24XX**

EGZAMIN EKSTERNISTYCZNY Z MATEMATYKI

BRANŻOWA SZKOŁA II STOPNIA

DATA: **[dzień miesiąc rok]**
CZAS PRACY: **120 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **40**

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 25 stron (zadania 1–24). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania i odpowiedzi zapisz w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. W rozwiązaniach zadań otwartych przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku oraz pamiętaj o jednostkach.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z *Zestawu wybranych wzorów matematycznych*, linijki, cyrkla oraz kalkulatora prostego.
8. Na tej stronie i na karcie punktowania w wyznaczonych miejscach wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Pamiętaj, że w razie stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań egzaminacyjnych lub zakłócenia prawidłowego przebiegu egzaminu w sposób, który utrudnia pracę pozostałym osobom zdającym, przewodniczący zespołu nadzorującego przerywa i unieważnia egzamin eksternistyczny.

Życzymy powodzenia!

Zadanie 1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{25^3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{125}}$ jest równa

A. 5^7 **B.** 5^6 **C.** 5^5 **D.** 5^4

Zadanie 2. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $4\log_3 2 + \log_3 6$ jest równa

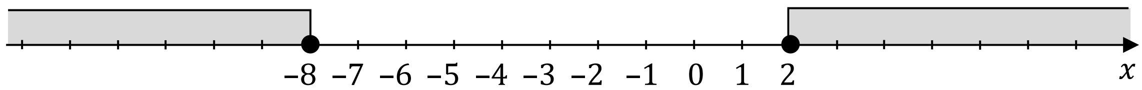
A. $\log_3 22$ **B.** $\log_3 96$ **C.** $4\log_3 8$ **D.** $4\log_3 12$

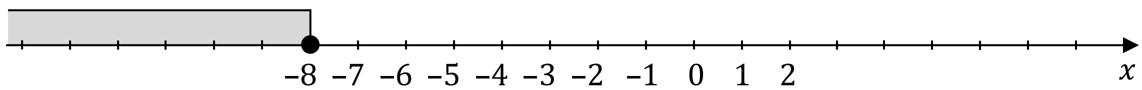
Zadanie 3. (0–1)

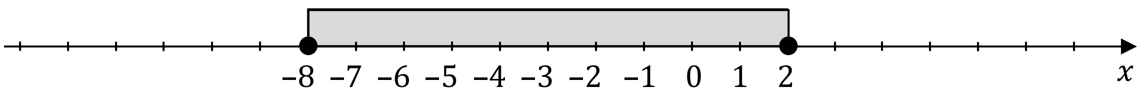
Dana jest nierówność:

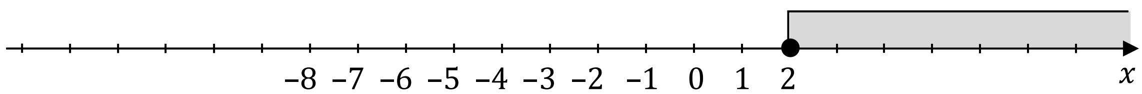
$$|x+3| \geq 5$$

Na którym rysunku prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających powyższą nierówność? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A.


B.


C.


D.


BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 4. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\left(3+\sqrt{2}\right)^3$ jest równa

A. $27+2\sqrt{2}$ **B.** $43+27\sqrt{2}$ **C.** $53+27\sqrt{2}$ **D.** $45+29\sqrt{2}$

Zadanie 5. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $\frac{x^2+2x+1}{x^2-x}\cdot\frac{x}{x+1}$ określone dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq-1$, $x\neq0$ i $x\neq1$ można przekształcić równoważnie do postaci

A. $\frac{3x}{-x-1}$ **B.** $\frac{x+1}{x-1}$ **C.** $\frac{x+1}{x^2-1}$ **D.** $\frac{(x+1)^2}{x^2-x}$

Zadanie 6. (0–3)

Rozwiąż równanie $\boldsymbol{2x^3-3x^2-18x+27=0}$.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 7. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $\frac{x(x-4)(2x+1)}{x-\frac{1}{2}}=0$ ma w zbiorze liczb rzeczywistych dokładnie

A. dwa rozwiązania: $x=-\frac{1}{2}$, $x=4$.

B. trzy rozwiązania: $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=4$.

C. trzy rozwiązania: $x=0$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=4$.

D. cztery rozwiązania: $x=0$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=4$.

Zadanie 8. (0–2)

Monetę dwuzłotową rozmieniono na 24 monety, wśród których było x monet 10-groszowych, y monet 5-groszowych oraz 2 monety 20-groszowe.

Dokończ zdanie. Wybierz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie poniższego zdania było prawdziwe.

Poprawne układy równań prowadzące do obliczenia liczby monet 5-groszowych i 10-groszowych to

A. $\begin{cases} x+y=24 \\ 2\cdot 20+x\cdot 10+y\cdot 5=200 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x+y=22 \\ 10x+5y=160 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2+x+y=24 \\ 0{,}4+0{,}1x+0{,}05y=200 \end{cases}$

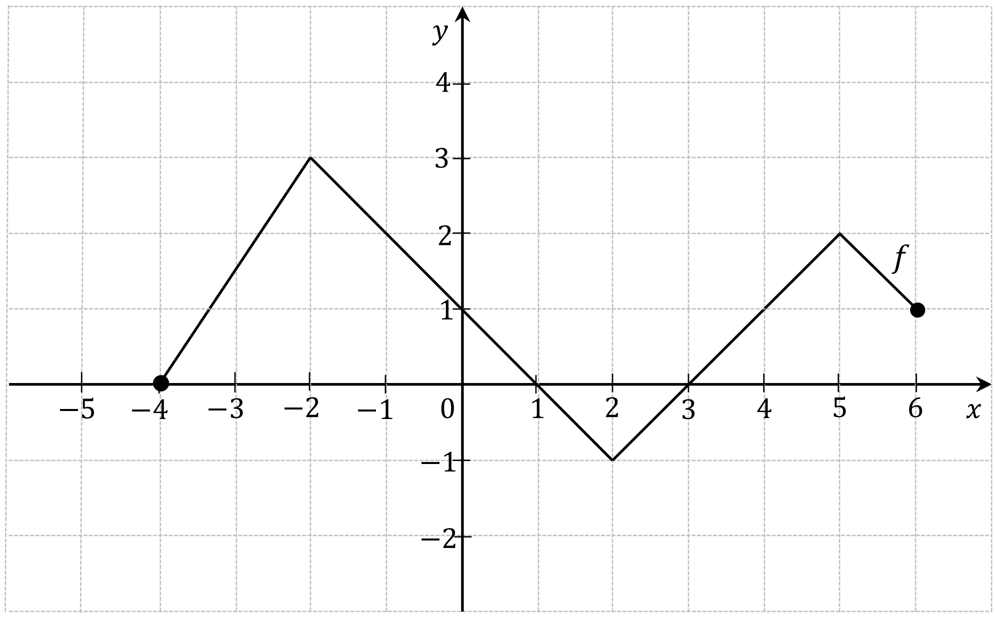
D. $\begin{cases} 2+x+y=24 \\ 2\cdot 20+10x+5y=2 \end{cases}$

E. $\begin{cases} 2+x+y=24 \\ 2\cdot 0{,}20+x\cdot 0{,}1+y\cdot 0{,}05=2 \end{cases}$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 9.

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej. Funkcja f jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \in \langle -4, 6 \rangle$. Do wykresu tej funkcji należą m.in. punkty o współrzędnych: $(-2, 3)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, -1)$, $(3, 0)$, $(5, 2)$ (zobacz rysunek).



Zadanie 9.1. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 0, 6 \rangle$ jest równa ………………………. .

Zadanie 9.2. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiedni zbiór w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do zbioru

$x \in$ ……………………………………………………………………………………… .

Zadanie 9.3. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby ……………………………….……………... .

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 10. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja liniowa $f(x) = (6 - 4m)x + 8$ jest malejąca dla każdej liczby m spełniającej warunek

A. $m < \frac{3}{2}$ **B.** $m > \frac{3}{2}$ **C.** $m = \frac{3}{2}$ **D.** $m \geq \frac{3}{2}$

Zadanie 11. (0–1)

W pokoju panuje stała temperatura $22\ ^\circ\mathrm{C}$. Zależność temperatury od czasu $T(t)$ naparu herbaty w szklance znajdującej się w tym pokoju, wyrażona w stopniach Celsjusza, dana jest wzorem $T(t) = 2^{6-\frac{t}{10}} + 22$, gdzie t oznacza czas w minutach mierzony od chwili zalania herbaty gorącą wodą.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W chwili zalania herbaty gorącą wodą napar w szklance miał temperaturę $90\ ^\circ\mathrm{C}$.	**P**	**F**
Po 5 minutach stygnięcia, od momentu zalania gorącą wodą, temperatura herbaty była niższa od $75\ ^\circ\mathrm{C}$.	**P**	**F**

Zadanie 12. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 3n + 1 \end{cases}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trzeci wyraz (a_3) tego ciągu jest równy

A. 8 **B.** 11 **C.** 15 **D.** 18

Zadanie 13. (0–1)

Ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Iloraz q tego ciągu jest liczbą dodatnią oraz $a_4 = -3$ i $a_6 = -12$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Piąty wyraz (a_5) tego ciągu jest równy

A. $-7{,}5$ **B.** -6 **C.** $-4{,}5$ **D.** 6

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 14. (0–2)

W sklepie ze sprzętem komputerowym jest promocja: *Komputery i laptopy – raty 0%.*
Przy zakupie na raty laptopa w cenie 3750 zł spłata jest rozłożona na 15 rat. Druga rata jest o 20 zł niższa od pierwszej. Każda kolejna rata jest o 20 zł niższa od poprzedniej.

Oblicz kwotę pierwszej raty. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 15. (0–1)

Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$	**P**	**F**
$\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{24}$	**P**	**F**

Zadanie 16. (0–1)

Dany jest romb o boku długości 8. Kąt rozwarty tego rombu ma miarę $120°$.

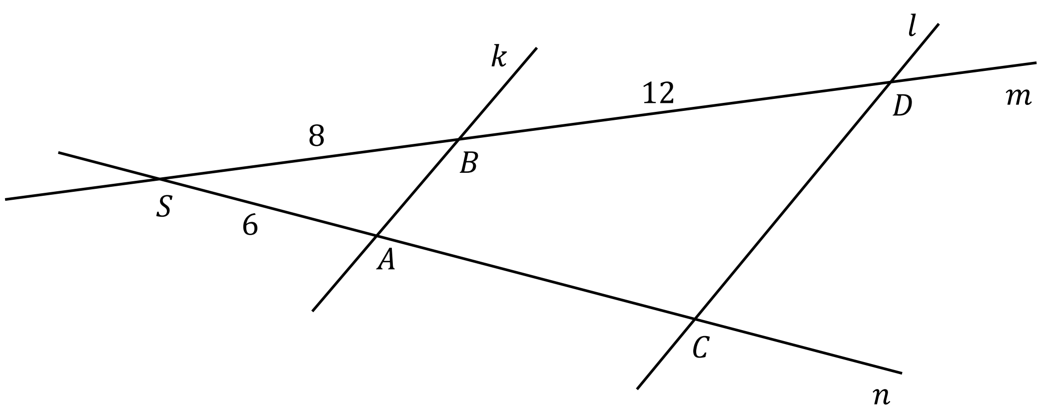
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole tego rombu jest równe

A. 16 **B.** $16\sqrt{3}$ **C.** 32 **D.** $32\sqrt{3}$

Zadanie 17. (0–1)

Na płaszczyźnie dane są cztery proste: k, l, m, n. Proste k i l są równoległe. Proste m i n przecinają się w punkcie S. Proste m i n przecinają proste k i l w punktach A, B, C, D, takich, że $|SA| = 6$, $|SB| = 8$, $|BD| = 12$ (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odcinek AC ma długość

A. 9 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 14

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 18. (0–2)

Dany jest trójkąt ABC, którego boki mają długości $|AB| = 5$, $|BC| = 8$, $|AC| = 10$.

Wykaż, że trójkąt ABC jest rozwartokątny.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 19.

Na płaszczyźnie kartezjańskiej (x, y) dane są prosta k o równaniu $3x - 4y + 2 = 0$ oraz okrąg O_1 o środku $S = (5, -1)$ i promieniu równym 3.

Zadanie 19.1. (0–3)

Wyznacz równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt S i prostopadłej do prostej k. Zapisz obliczenia.

Zadanie 19.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obrazem okręgu O_1 w symetrii względem początku układu współrzędnych jest okrąg O_2 o równaniu

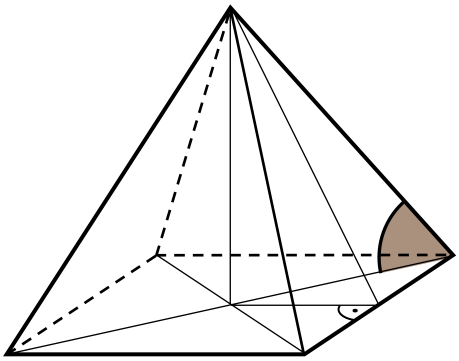
A. $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$
B. $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 3$
C. $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$
D. $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 3$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

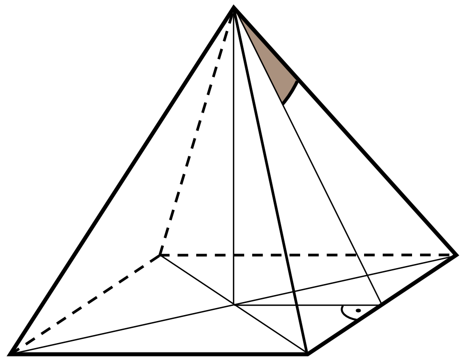
Zadanie 20. (0–2)

Na każdym z rysunków I–IV przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny oraz kolorem zaznaczono jeden z kątów w tym ostrosłupie.

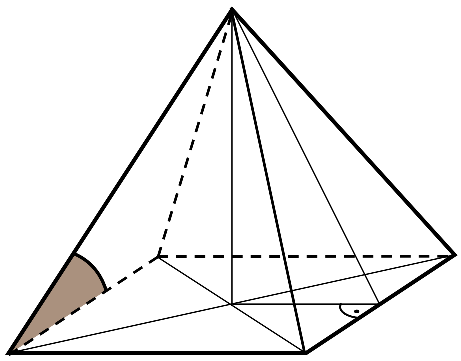
I.



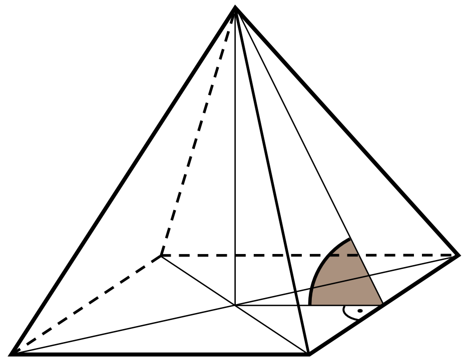
II.



III.



IV.



Uzupełnij każde ze zdań 1. i 2. Wpisz w wykropkowanym miejscu numer rysunku wybrany spośród I–IV, aby zdanie było prawdziwe.

1. Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa zaznaczono kolorem na rysunku ………… .
2. Kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa zaznaczono kolorem na rysunku …………. .

Zadanie 21. (0–1)

Objętość stożka S_1 jest równa 18π. Stożek S_2 jest podobny do stożka S_1 w skali 3.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość stożka S_2 jest równa

A. 6π **B.** 54π **C.** 162π **D.** 486π

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 22. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich trzycyfrowych parzystych liczb naturalnych utworzonych z cyfr: $0, 1, 2, 3, 4$ oraz takich, w których zapisie dziesiętnym każda z podanych cyfr może wystąpić dokładnie jeden raz, jest

A. $4 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2$ **B.** $4 \cdot 3 \cdot 1$
C. $4 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2$ **D.** $5 \cdot 4 \cdot 3$

Zadanie 23. (0–3)

Ze zbioru liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Niech A oznacza zdarzenie, że suma wylosowanych liczb jest dzielnikiem liczby 24.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 24. (0–4)

Firma ma zaprojektować puszkę reklamową w kształcie walca. Powierzchnia boczna puszki po rozwinięciu na płaszczyźnie ma być prostokątem o obwodzie 74 cm.

Oblicz promień i wysokość puszki, której pole powierzchni całkowitej jest największe. Przyjmij w obliczeniach $\pi = \frac{22}{7}$. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Uwaga

Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	I. Liczby rzeczywiste. Zdający: 3) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	I. Liczby rzeczywiste. Zdający: 6) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	I. Liczby rzeczywiste. Zdający: 5) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje […] nierówności typu: […] $\lvert x+3\rvert \geq 4$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający: 1) stosuje wzory skróconego mnożenia: $(a+b)^3$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający: 6) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 6. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	III. Równania. Zdający: 2) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania równań i podanie prawidłowych rozwiązań
$x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3$.

2 pkt – zapisanie alternatywy dwóch równań w postaci: $2x - 3 = 0$ lub $x^2 - 9 = 0$.

1 pkt – przekształcenie lewej strony równania do postaci iloczynu dwóch wyrażeń:
$(2x - 3)(x^2 - 9) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiązujemy podane równanie – najpierw lewą stronę równania zapisujemy w postaci iloczynu. W tym celu grupujemy parami wyrazy po lewej stronie równania i wyłączamy wspólny czynnik przed nawias. Zapisujemy kolejno

$$x^2(2x-3)-9(2x-3) \quad \text{lub} \quad 2x(x^2-9)-3(x^2-9)$$

Otrzymujemy postać równoważną danego równania

$$(x^2-9)(2x-3)=0$$

Ponieważ lewa strona równania jest iloczynem dwóch wyrażeń, który jest równy zeru, wynika stąd, że przynajmniej jedno z tych wyrażeń przyjmuje wartość zero.
Otrzymujemy zatem dwa równania

$$2x-3=0 \quad \text{lub} \quad x^2-9=0$$

Rozwiązaniem pierwszego równania jest $x=\frac{3}{2}$.

Ponieważ lewa strona równania $x^2-9=0$ jest różnicą kwadratów dwóch wyrażeń, stosujemy jeden ze wzorów skróconego mnożenia.

$$(x-3)(x+3)=0$$

Podobnie jak zapisaliśmy wyżej, z iloczynu równego zeru wnioskujemy, że

$$x-3=0 \quad \text{lub} \quad x+3=0$$

Zatem

$$x=3 \quad \text{lub} \quad x=-3$$

Dane równanie ma trzy rozwiązania: $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=-3$, $x_3=3$.

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	III. Równania. Zdający: 3) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)}=0$, gdy wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 8. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	IV. Układy równań. Zdający: 1) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania

2 pkt – dwie odpowiedzi poprawne.

1 pkt – jedna odpowiedź poprawna.

0 pkt – dwie odpowiedzi niepoprawne albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B, E

Zadanie 9.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	V. Funkcje. Zdający: 1) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą […] wykresów […] itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 0, 6 \rangle$ jest równa ….2….. .

Zadanie 9.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	V. Funkcje. Zdający: 1) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą […] wykresów […] itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do zbioru

$x \in$ $(-4,1) \cup (3,6\rangle$.

Zadanie 9.3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	V. Funkcje. Zdający: 1) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą […] wykresów […] itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: $-4,\ 1,\ 3$.

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	V. Funkcje. Zdający: 2) wykorzystuje własności funkcji liniowej […] do rozwiązywania zadań, również w zastosowaniach praktycznych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	V. Funkcje. Zdający: 3) posługuje się funkcjami wykładniczą […] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FP

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	VI. Ciągi. Zdający: 2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	VI. Ciągi. Zdający: 6) stosuje wzór na *n*-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 14. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	VI. Ciągi. Zdający: 5) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych […] do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości pierwszej raty i podanie prawidłowego wyniku 390 zł.
1 pkt – zauważenie, że problem można opisać za pomocą ciągu arytmetycznego i zapisanie poprawnego równania $\frac{2a_1+14\cdot(-20)}{2}\cdot 15 = 3750$

LUB

– zapisanie poprawnego równania z jedną niewiadomą x.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

I sposób

Kolejne raty tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $S_{15} = 3750$ i $r = -20$. Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i otrzymujemy równanie

$$\frac{2a_1 + 14\cdot(-20)}{2}\cdot 15 = 3750$$

Przekształcamy to równanie równoważnie i kolejno otrzymujemy

$$\frac{2a_1 - 280}{2}\cdot 15 = 3750$$

$$(a_1 - 140)\cdot 15 = 3750$$

$$a_1 - 140 = 250$$

$$a_1 = 390$$

Pierwsza rata była równa 390 zł.

II sposób

Wprowadzamy oznaczenie x – wartość pierwszej raty i zapisujemy równanie (zgodnie z warunkami zadania)

$$15x - \left(\begin{array}{c}20 + 40 + 60 + 80 + 100 + 120 + 140 + 160 + 180 + 200 + \\ + 220 + 240 + 260 + 280\end{array}\right) = 3750$$

Rozwiązujemy równanie

$$15x - 2100 = 3750$$
$$15x = 5850$$
$$x = 390$$

Pierwsza rata była równa 390 zł.

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	VII. Trygonometria. Zdający: 2) korzysta ze wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PP

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	VII. Trygonometria. Zdający: 3) stosuje […] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	VIII. Planimetria. Zdający: 3) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 18. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	VIII. Planimetria. Zdający: 2) rozpoznaje trójkąty […] rozwartokątne przy danych długościach boków (stosuje m.in. twierdzenie cosinusów), stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok; 5) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania
2 pkt – poprawna metoda obliczenia cosinusa kąta ABC, zapisanie prawidłowego wyniku $\cos(\sphericalangle ABC) = -\frac{11}{80}$ i sformułowanie wniosku na podstawie znaku cosinusa największego kąta trójkąta ABC – trójkąt ABC jest rozwartokątny

LUB

– zapisanie prawidłowej nierówności $|AB|^2 + |BC|^2 < |AC|^2$ albo $89 < 100$ i na tej podstawie sformułowanie wniosku – trójkąt ABC jest rozwartokątny.

1 pkt – poprawne zastosowanie twierdzenia cosinusów – zapisanie równania:
$10^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(\sphericalangle ABC)$

LUB

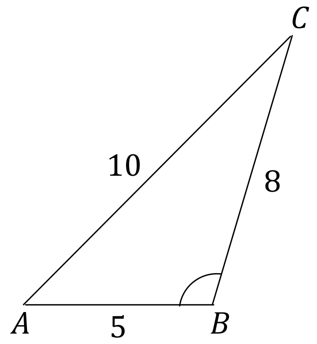
– poprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

I sposób

Wykonujemy pomocniczy rysunek.



Korzystamy z twierdzenia: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok i wnioskujemy, że największy kąt trójkąta ABC leży naprzeciw boku AC.
Korzystamy w twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC i zapisujemy równanie

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos(\sphericalangle ABC)$$
$$10^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(\sphericalangle ABC)$$
$$100 = 25 + 64 - 80 \cdot \cos(\sphericalangle ABC)$$

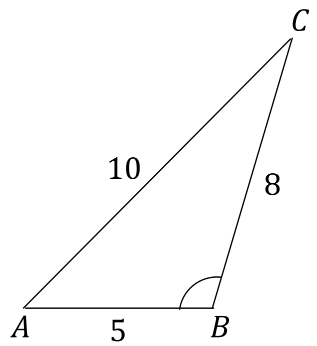
Stąd otrzymujemy

$$\cos(\sphericalangle ABC) = -\frac{11}{80}$$

Ponieważ $\cos(\sphericalangle ABC) < 0$, więc miara kąta ABC jest większa od $90°$.
Zatem trójkąt ABC jest rozwartokątny, co należało wykazać.

II sposób

Wykonujemy pomocniczy rysunek.



Korzystamy z twierdzenia: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok i wnioskujemy, że największy kąt trójkąta ABC leży naprzeciw boku AC.
Korzystamy w twierdzenia Pitagorasa i sprawdzamy dla trójkąta ABC

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

$$|AB|^2 + |BC|^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$$
$$|AC|^2 = 10^2 = 100$$

Ponieważ $|AB|^2 + |BC|^2 < |AC|^2$, to trójkąt ABC jest rozwartokątny, co należało wykazać.

Zadanie 19.1. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych podczas rozwiązywania problemów praktycznych i teoretycznych.	IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 1) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, […] prostopadłość do innej prostej […]).

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia równania prostej l i zapisanie prawidłowego wyniku $y = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$.

2 pkt – poprawna metoda obliczenia współczynnika kierunkowego prostej l prostopadłej do prostej k i zapisanie wyniku $a_l = -\frac{4}{3}$.

1 pkt – poprawne przekształcenie równania ogólnego prostej k do postaci kierunkowej i obliczenie współczynnika kierunkowego tej prostej $a_k = \frac{3}{4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie ogólne $3x - 4y + 2 = 0$ prostej k przekształcamy do postaci kierunkowej

$$4y = 3x + 2$$
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej l prostopadłej do prostej k.

$$a_l \cdot a_k = -1$$
$$a_l \cdot \frac{3}{4} = -1$$
$$a_l = -\frac{4}{3}$$

Ponieważ prosta l przechodzi przez punkt $S = (5, -1)$, więc jej równanie ma postać

$$y = -\frac{4}{3}(x - 5) - 1$$

Prosta l ma równanie $y = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$.

Zadanie 19.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 2) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$; 5) wyznacza obrazy okręgów w […] symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 20. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	X. Stereometria. Zdający: 3) rozpoznaje w […] ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami […].

Zasady oceniania
2 pkt – dwie odpowiedzi poprawne.
1 pkt – jedna odpowiedź poprawna.
0 pkt – dwie odpowiedzi niepoprawne albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1. Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa zaznaczono kolorem na rysunku …IV… .
2. Kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa zaznaczono kolorem na rysunku …I… .

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	X. Stereometria. Zdający: 7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.	XI. Kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 23. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający: 1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i zapisanie prawidłowego wyniku $P(A) = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$.

2 pkt – poprawne obliczenie liczby zdarzeń wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 49$ (*lub* wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia)

ORAZ

– poprawne obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 21$ (*lub* wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A)

LUB

– zaznaczenie w tabeli wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

1 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 49$

LUB

– wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia

LUB

– poprawne obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A $|A| = 21$

LUB

– wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A
$(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),$
$(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,7),(6,2),(6,6)\ (7,1),(7,5)$

LUB

– sporządzenie właściwej tabeli i wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

I sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para liczb (x, y), gdzie $x \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ i $y \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ oraz $x \neq y$. Wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne. Jest to model klasyczny.
Zbiór Ω wszystkich zdarzeń elementarnych, to

$$|\Omega| = \left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(4,7),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(5,7),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(6,7),\\(7,1),(7,2),(7,3),(7,4),(7,5),(7,6),(7,7)\end{matrix}\right\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$
Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest dzielnikiem liczby 24.
Wtedy

$$|A| = \left\{ \begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1), \\ (3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,7),(6,2),(6,6),(7,1),(7,5) \end{matrix} \right\}$$

Zdarzeniu A sprzyja więc 21 zdarzeń elementarnych, czyli $|A| = 21$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$$P(A) = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb jest dzielnikiem liczby 24, jest równe $\frac{3}{7}$.

II sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para liczb (x, y), gdzie $x \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ i $y \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ oraz $x \neq y$. Wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne.
Sytuację zadaniową możemy przedstawić w tabeli, np.

	1	2	3	4	5	6	7
1	**(1,1)**	**(1,2)**	**(1,3)**	(1,4)	**(1,5)**	(1,6)	**(1,7)**
2	**(2,1)**	**(2,2)**	(2,3)	**(2,4)**	(2,5)	**(2,6)**	(2,7)
3	**(3,1)**	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	**(3,5)**	(3,6)	(3,7)
4	(4,1)	**(4,2)**	(4,3)	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)	(4,7)
5	**(5,1)**	(5,2)	**(5,3)**	(5,4)	(5,5)	(5,6)	**(5,7)**
6	(6,1)	**(6,2)**	(6,3)	(6,4)	(6,5)	**(6,6)**	(6,7)
7	**(7,1)**	(7,2)	(7,3)	(7,4)	**(7,5)**	(7,6)	(7,7)

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia jest równa

$$|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$$

Zdarzeniu A sprzyja 21 zdarzeń elementarnych, czyli $|A| = 21$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$$P(A) = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb jest dzielnikiem liczby 24, jest równe $\frac{3}{7}$.

Zadanie 24. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	XIII. Optymalizacja. Zdający: – rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

4 pkt – poprawne metody obliczenia promienia podstawy i wysokości walca o największym polu powierzchni całkowitej oraz podanie prawidłowych wyników $r = 3{,}5$ cm oraz $h = 15$ cm.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia długości promienia r podstawy walca, dla którego funkcja P osiąga wartość największą i zapisanie wyniku $r = 3{,}5$.

2 pkt – zapisanie poprawnej funkcji P pola powierzchni całkowitej walca w zależności od jednej zmiennej oraz wyznaczenie dziedziny D tej funkcji, np.

$$P(r) = (2\pi - 4\pi^2)r^2 + 74\pi r,\ D = \left(0, \frac{37}{2\pi}\right)$$

LUB

$$P(r) = -\frac{1628}{49}r^2 + \frac{1628}{7}r\ ,\ D = \left(0, \frac{259}{44}\right)$$

1 pkt – wyznaczenie wysokości h walca w zależności od promienia r jego podstawy

$$h = 37 - 2\pi r \quad \textit{LUB} \quad h = 37 - \frac{44}{7}r$$

LUB

– wyznaczenie promienia podstawy r walca w zależności od wysokości h walca

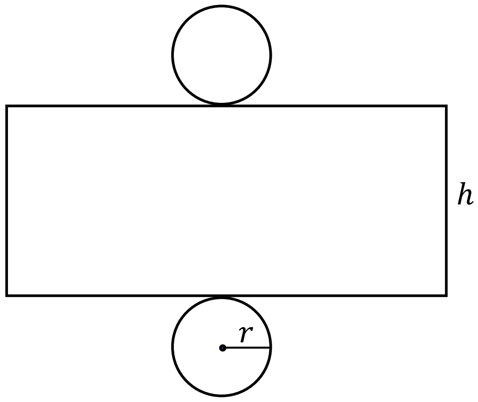
$$r = \frac{37-h}{2\pi} \quad \textit{LUB} \quad r = \frac{37-h}{\frac{44}{7}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

I sposób

Wprowadzamy oznaczenia: r – promień podstawy walca, h – wysokość walca.
Wykonujemy pomocniczy rysunek.



Ponieważ obwód prostokąta będącego rozwinięciem powierzchni bocznej walca jest równy 74, więc $2(2\pi r + h) = 74$. Stąd $h = 37 - 2\pi r$.

Pole powierzchni całkowitej walca jest równe:

$$P(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot (37 - 2\pi r)$$

$$P(r) = (2\pi - 4\pi^2)r^2 + 74\pi r, \text{ gdzie } r \in \left(0, \frac{259}{44}\right)$$

Wykresem funkcji $P(r)$ jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu.
Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja P może osiągnąć największą wartość w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi paraboli, tj. dla argumentu $r = \frac{-74\pi}{2\cdot(2\pi-4\pi^2)}$.

Ponieważ $r = \frac{-74\pi}{2\cdot(2\pi-4\pi^2)} = \frac{-37}{2(1-2\pi)} = \frac{-37}{2\left(1-\frac{44}{7}\right)} = 3{,}5 \in \left(0, \frac{37}{2\pi}\right)$, więc funkcja P największą

wartość przyjmuje dla argumentu $r = 3{,}5$.
Wtedy

$$h = 37 - 2\pi \cdot \frac{7}{2} = 37 - 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{2} = 37 - 22 = 15$$

Z rozważanych walców największe pole powierzchni całkowitej ma ten, którego promień podstawy ma długość $3{,}5$ cm, a wysokość jest równa 15 cm.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

4 pkt – poprawne metody obliczenia promienia podstawy i wysokości walca o największym polu powierzchni całkowitej oraz podanie prawidłowych wyników $r = 3{,}5$ cm oraz $h = 15$ cm.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia długości boku a prostokąta, dla którego funkcja P osiąga wartość największą i zapisanie wyniku $a = 22$.

2 pkt – zapisanie poprawnej funkcji P pola powierzchni całkowitej walca w zależności od jednej zmiennej oraz wyznaczenie dziedziny D tej funkcji, np.

$$P(a) = \frac{1-2\pi}{2\pi}a^2 + 37a,\ D = (0, 37)$$

1 pkt – wyznaczenie wysokości h walca w zależności od boku a prostokąta $h = 37 - a$

LUB

– wyznaczenie promienia r podstawy walca w zależności od boku a prostokąta $r = \frac{a}{2\pi}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

II sposób

Wprowadzamy oznaczenia: $a,\ b$ – długości boków prostokąta będącego rozwinięciem powierzchni bocznej walca.
Ponieważ obwód prostokąta będącego rozwinięciem powierzchni bocznej walca jest równy 74, więc $a + b = 37$. Stąd $b = 37 - a$.
Wysokość walca h jest równa bokowi b prostokąta, czyli $h = 37 - a$.
Ponieważ długość boku a prostokąta jest równa obwodowi podstawy walca $2\pi r = a$, więc

$$r = \frac{a}{2\pi}.$$

Pole powierzchni całkowitej walca jest równe

$$P(a) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 + 2\pi \cdot \frac{a}{2\pi} \cdot (37 - a)$$

$$P(a) = \frac{1-2\pi}{2\pi}a^2 + 37a, \text{ gdzie } a \in (0, 37)$$

Wykresem funkcji $P(a)$ jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu.
Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja P może osiągnąć największą wartość w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi paraboli, tj. dla argumentu $a = \frac{-37}{2\cdot\frac{1-2\pi}{2\pi}}$.

Ponieważ

$$a = \frac{-37}{2\cdot\frac{1-2\pi}{2\pi}} = \frac{37\pi}{1-2\pi} = \frac{37\cdot\frac{22}{7}}{1-\frac{44}{7}} = 22 \in (0, 37),$$

więc funkcja P największą wartość przyjmuje dla argumentu $a = 22$.

Promień podstawy i wysokość walca są równe

$$r = \frac{a}{2\pi} \qquad r = \frac{22}{\frac{44}{7}} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$h = 37 - a \qquad h = 37 - 22 = 15$$

Z rozważanych walców największe pole powierzchni całkowitej ma ten, którego promień podstawy ma długość $3{,}5$ cm, a wysokość jest równa 15 cm.