

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Miejsce na naklejkę.**

Sprawdź, czy kod na naklejce to  
**M-700.**

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.  
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

**Egzamin maturalny**

**Formuła 2023**

**MATEMATYKA**

**Poziom rozszerzony**

**TEST DIAGNOSTYCZNY**

Symbol arkusza

**M-700-2412**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

dostosowania zasad oceniania.

DATA: **12 grudnia 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

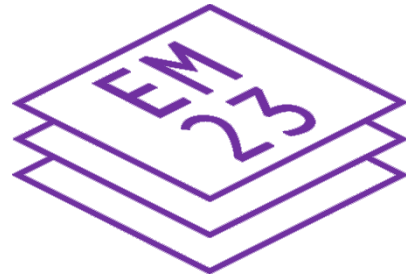
CZAS TRWANIA: **do 210 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

**Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym**

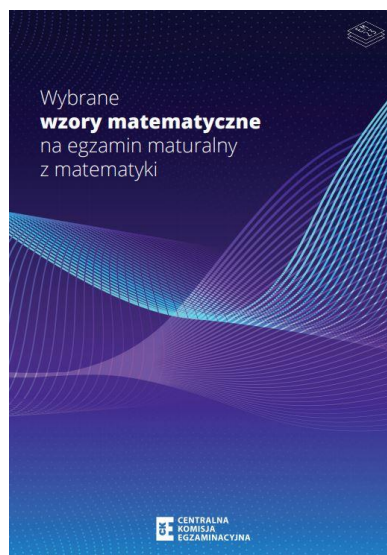
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





## Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 30 stron (zadania 1–13). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane  
na następnych stronach.**

**Zadanie 1. (0-2)**

Ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze można opisać zależnością

$$Q(t) = Q_0 \cdot \beta^{-t} \quad \text{dla } t \geq 0$$

gdzie:

$Q_0$  – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili początkowej ( $t = 0$ )  
 wyrażony w milikulombach

$Q$  – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili  $t$  (licząc od chwili  
 początkowej) wyrażony w milikulombach

$\beta$  – stała dodatnia

$t$  – czas wyrażony w sekundach.

Wiadomo, że w chwili  $t = 4$  s w kondensatorze był zgromadzony ładunek 2 milikulombów,  
 a w chwili  $t = 6$  s zgromadzony ładunek to 18 milikulombów.

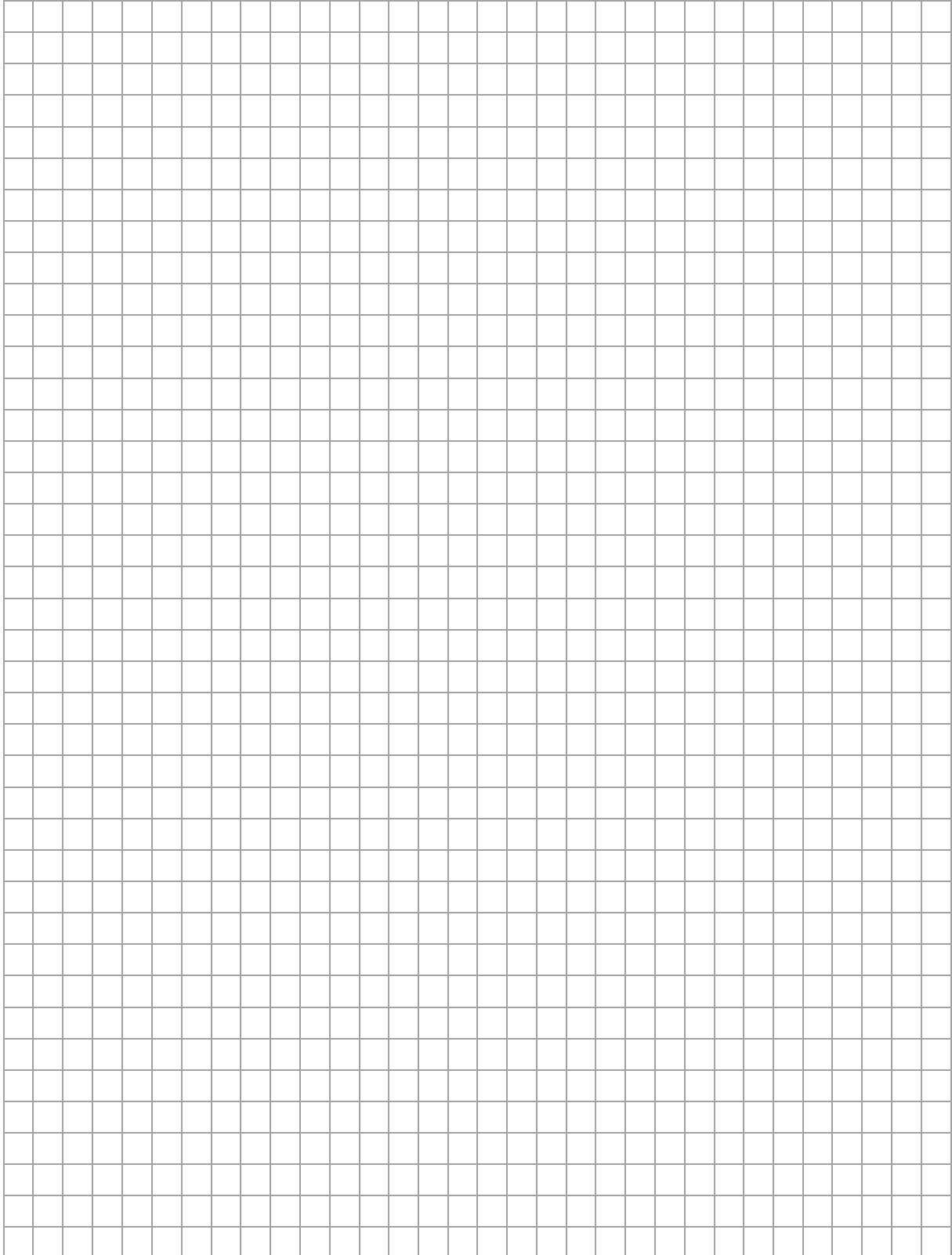
**Oblicz, ile milikulombów ładunku było zgromadzone w tym kondensatorze w chwili  
 $t = 5$  s. Zapisz obliczenia.**




**Zadanie 2. (0–2)**

Okrąg  $\mathcal{O}$  jest styczny do boków  $AC$  i  $BC$  trójkąta  $ABC$  oraz przecina bok  $AB$  tego trójkąta w punktach  $M$  oraz  $N$ , przy czym  $0 < |AM| < |AN| < |AB|$ .

**Wykaż, że jeśli  $|AM| = |BN|$ , to trójkąt  $ABC$  jest równoramienny.**

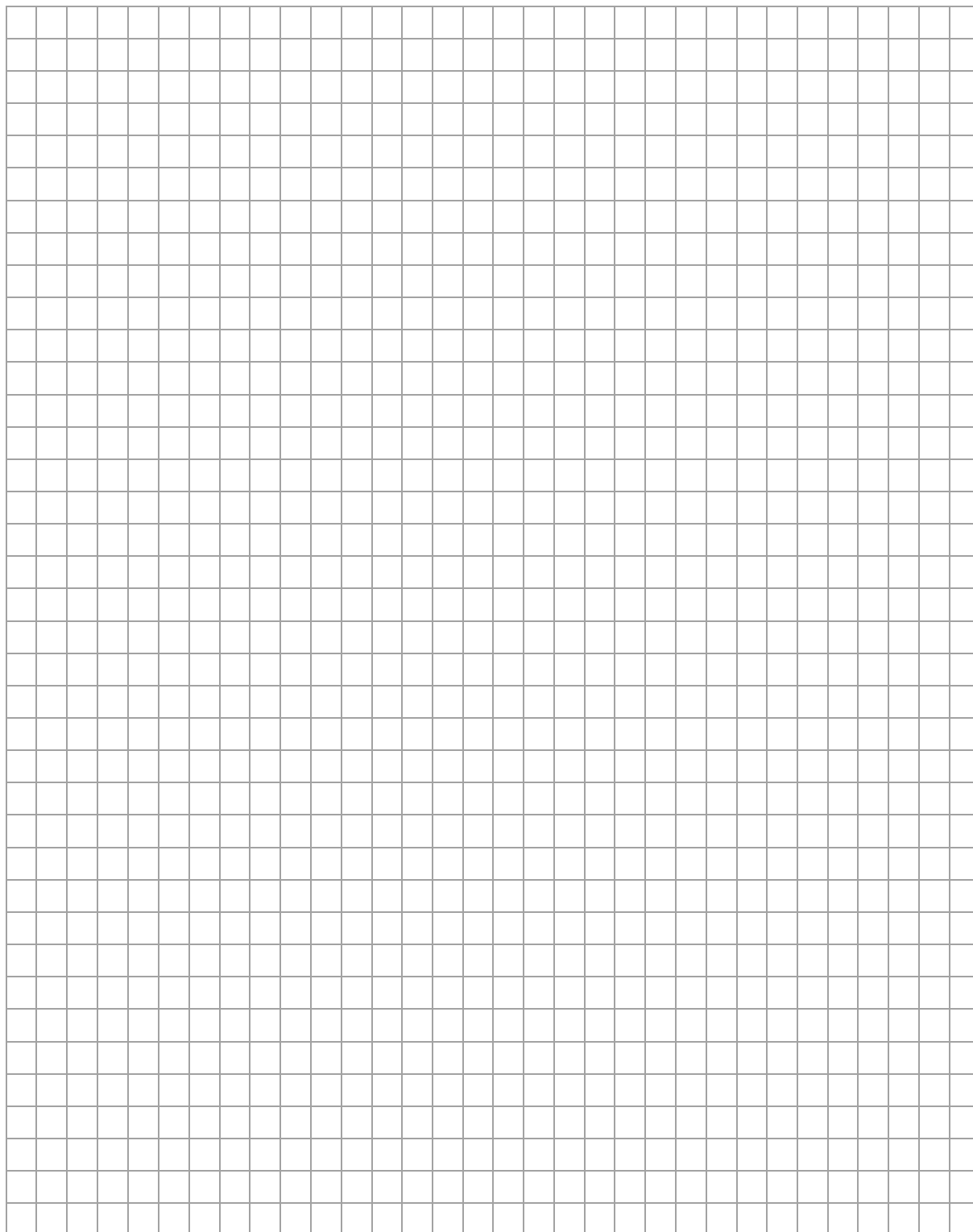


**Zadanie 3. (0–3)**

Podstawa walca ma średnicę długości  $d$ , wysokość tego walca ma długość  $h$ . Iloczyn długości średnicy i wysokości walca jest równy  $12\sqrt{3}$ .

Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe  $12\pi(\sqrt{3} + 1)$ .

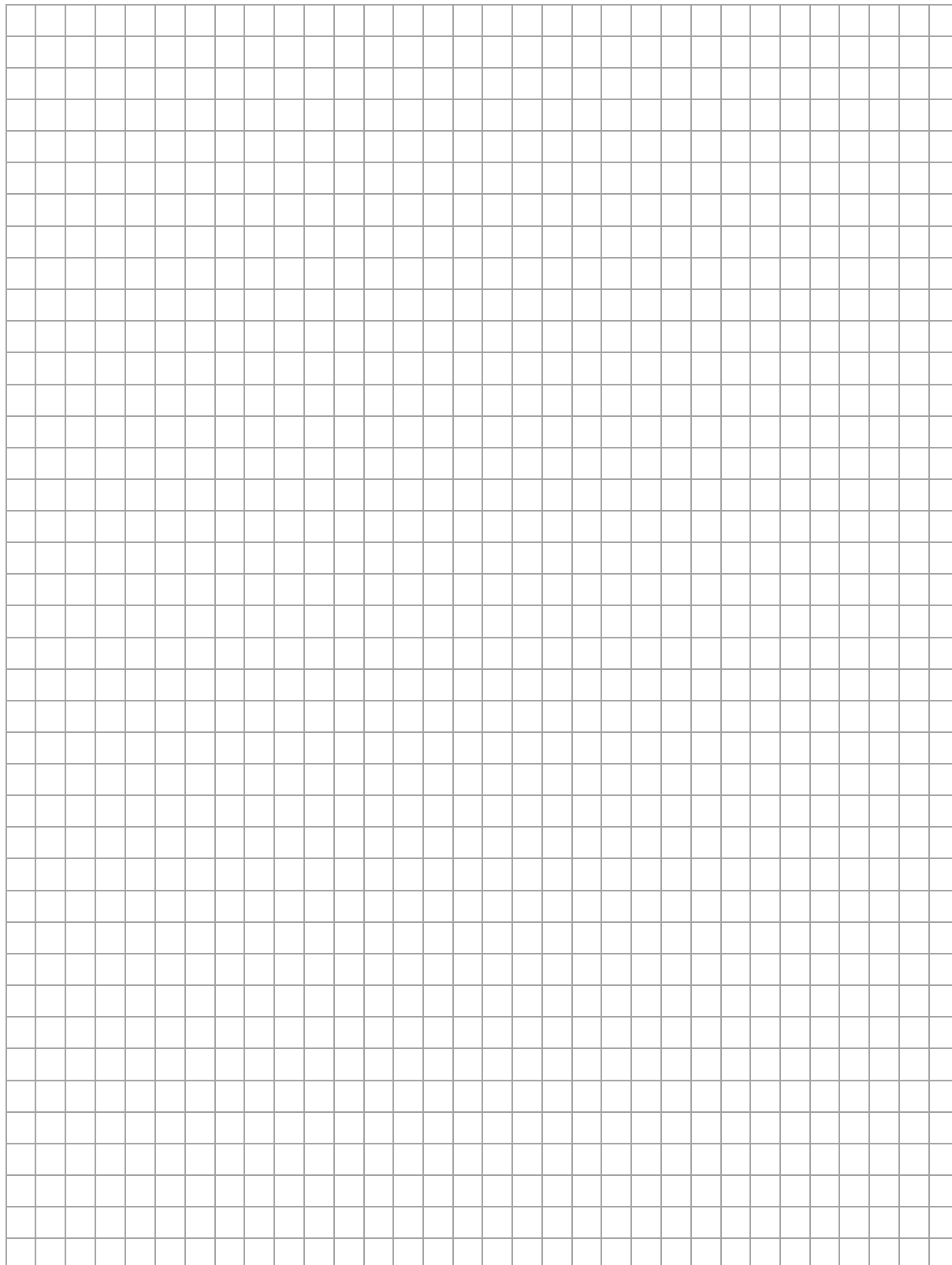
**Oblicz objętość tego walca. Zapisz obliczenia.**



**Zadanie 4. (0–3)**

Wykaż, że

$$\frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1} = 1$$

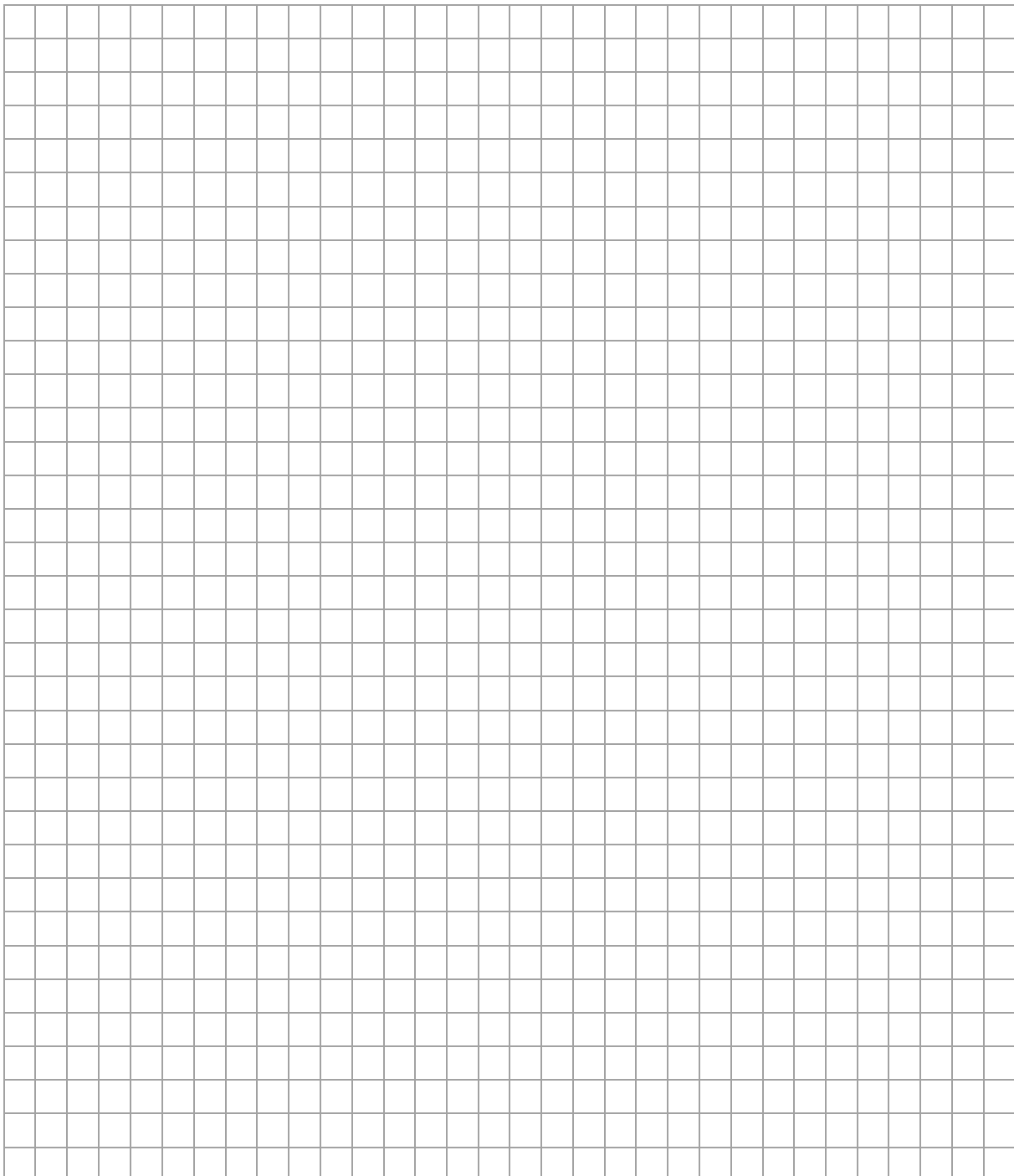


**Zadanie 5. (0–3)**

35% osób pracujących w pewnym urzędzie ma wyższe wykształcenie. W tym urzędzie dobrze zna język niemiecki 70% osób mających wyższe wykształcenie i 40% osób bez wyższego wykształcenia.

Spośród osób pracujących w tym urzędzie wybieramy losowo jedną osobę.

**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wybierzemy osobę z wyższym wykształceniem, jeżeli wiadomo, że ta osoba dobrze zna język niemiecki. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.**

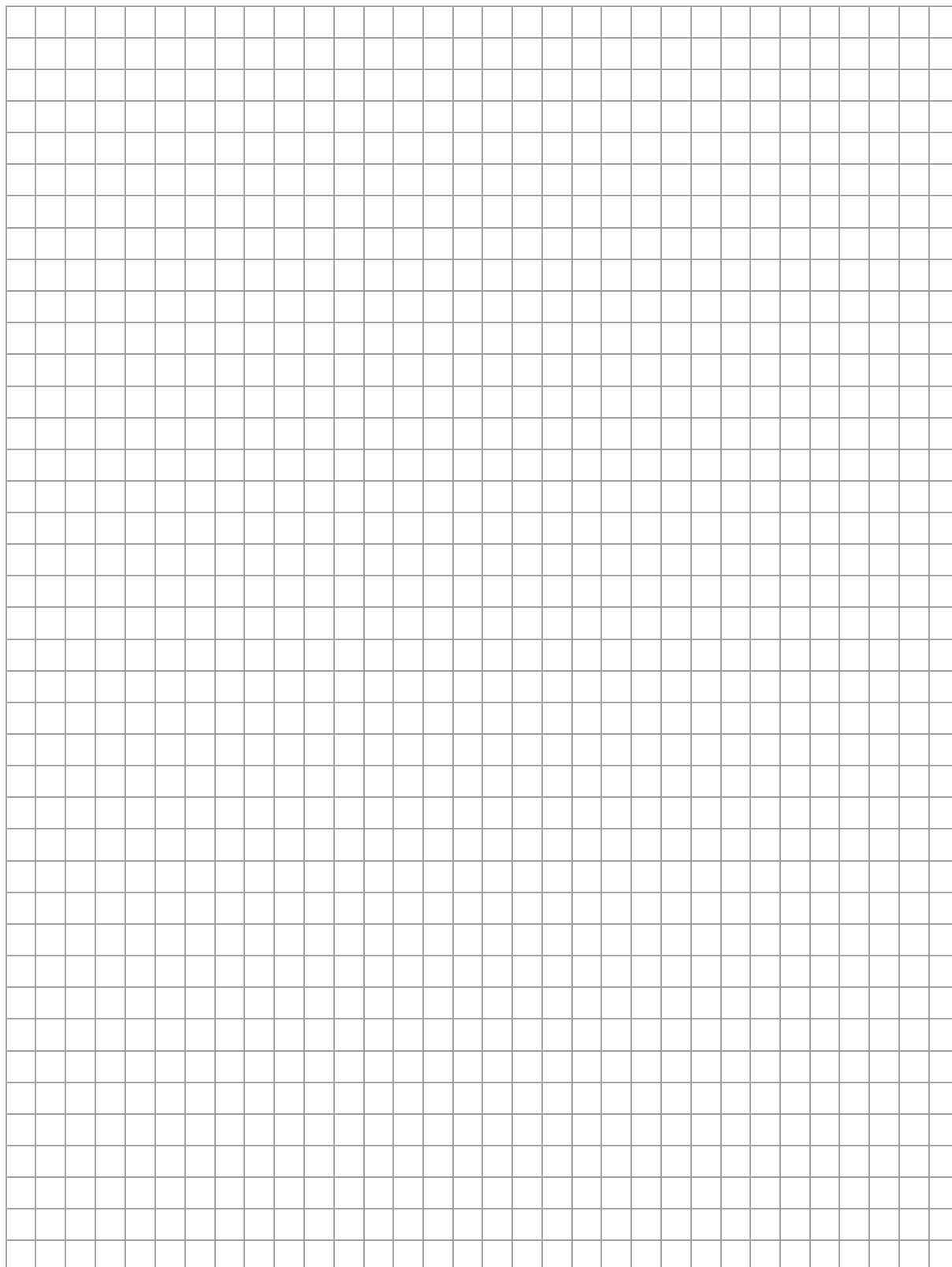


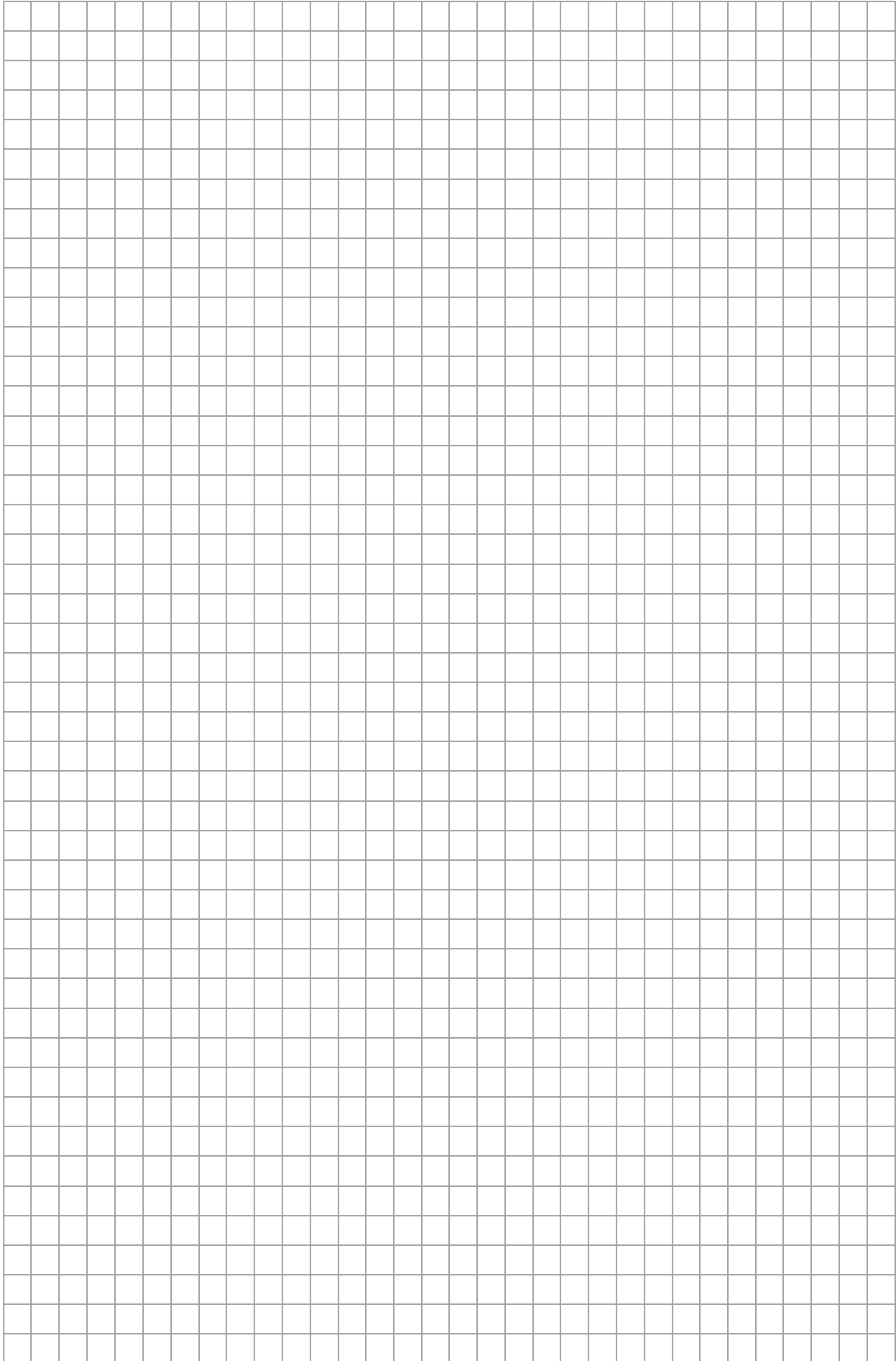


**Kolejne zadania egzaminacyjne są wydrukowane  
na następnych stronach.**

**Zadanie 6. (0–4)****Rozwiąż równanie**

$$|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$$

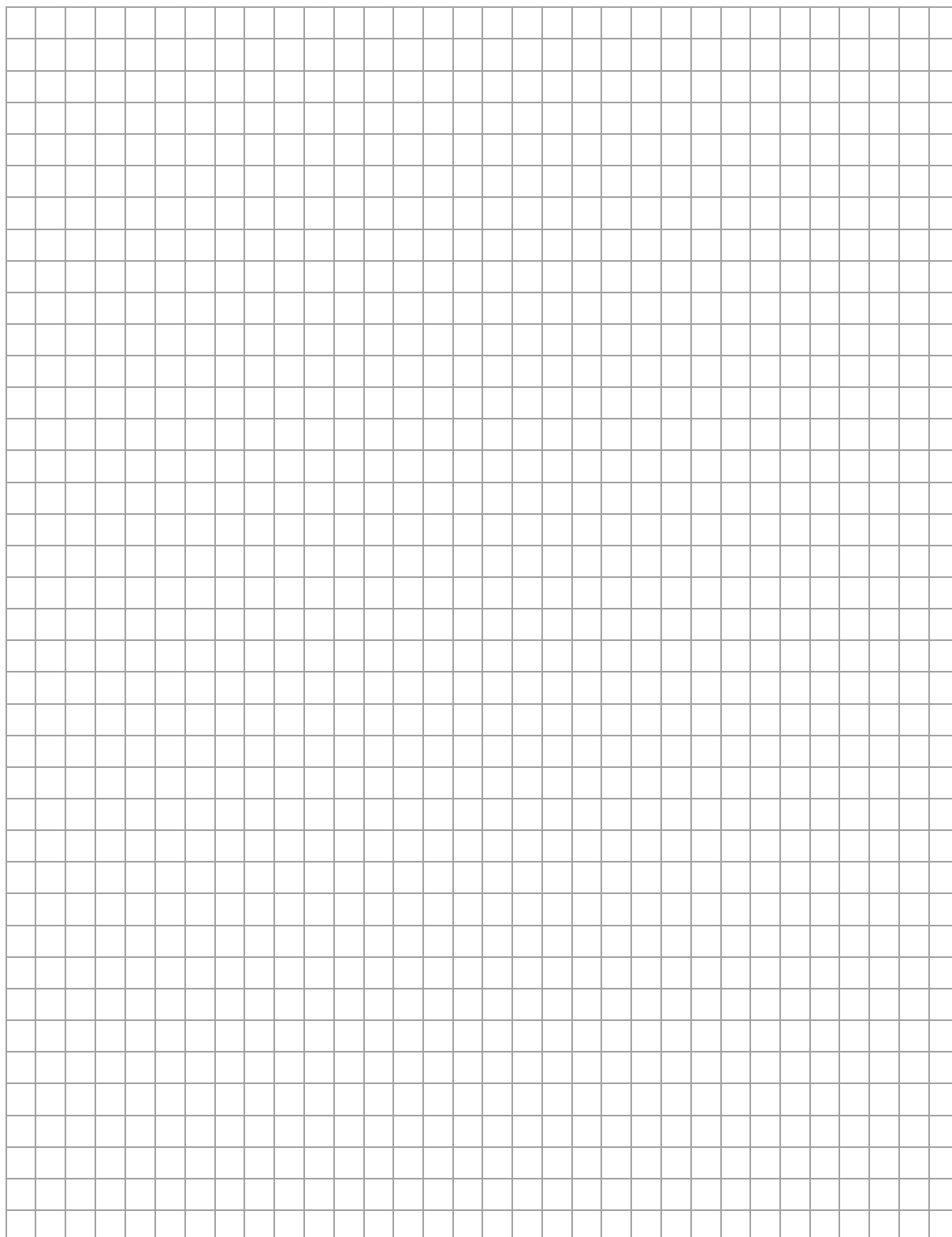
**Zapisz obliczenia.**

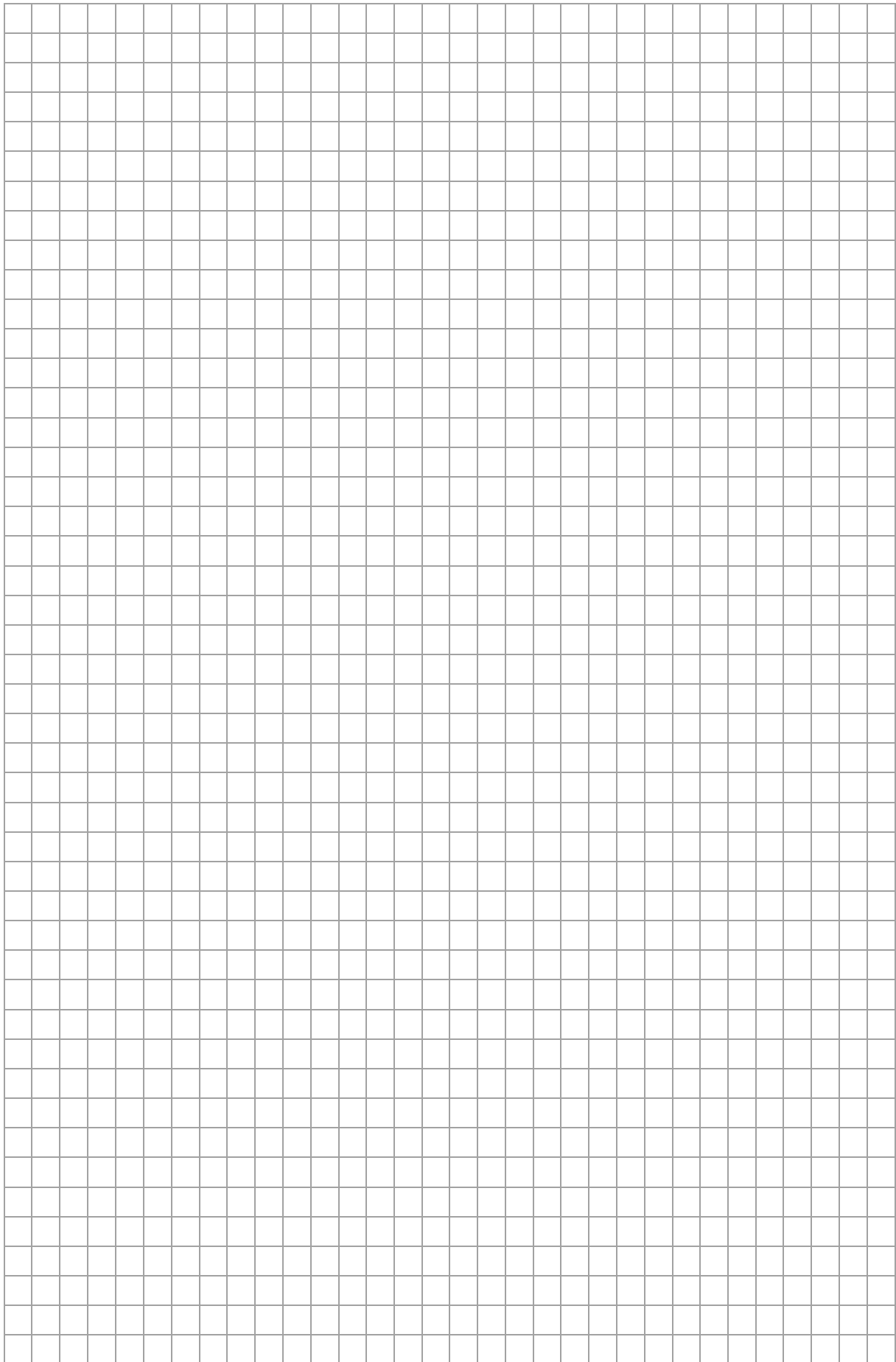


**Zadanie 7. (0–4)**

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  dane są:  
okrąg o równaniu  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 50$  i punkty  $A = (6, 4)$  oraz  $B = (-6, 8)$ .  
Punkt  $C$  leży na tym okręgu i  $|AC| = |BC|$ .

**Oblicz współrzędne punktu  $C$ . Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.**



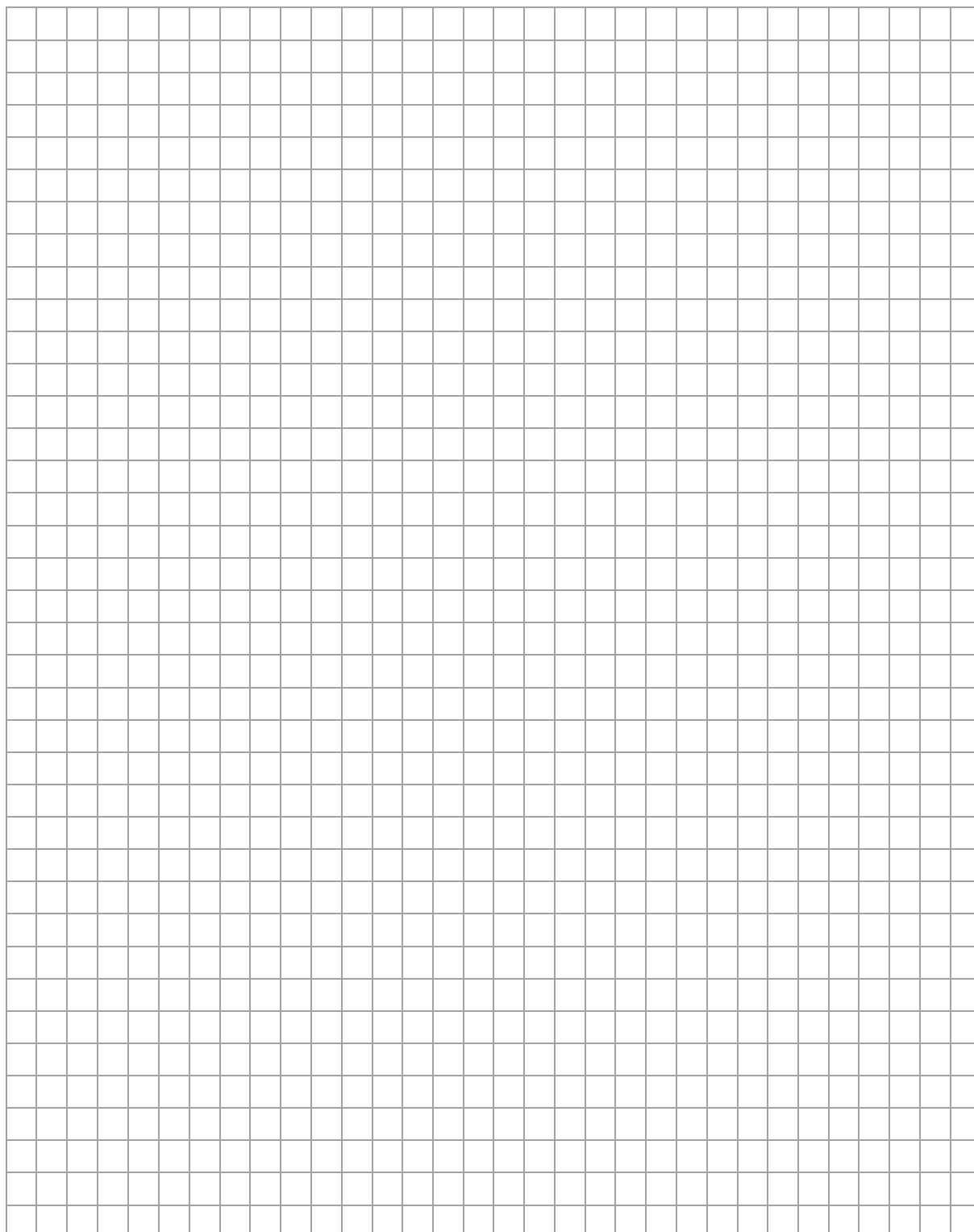


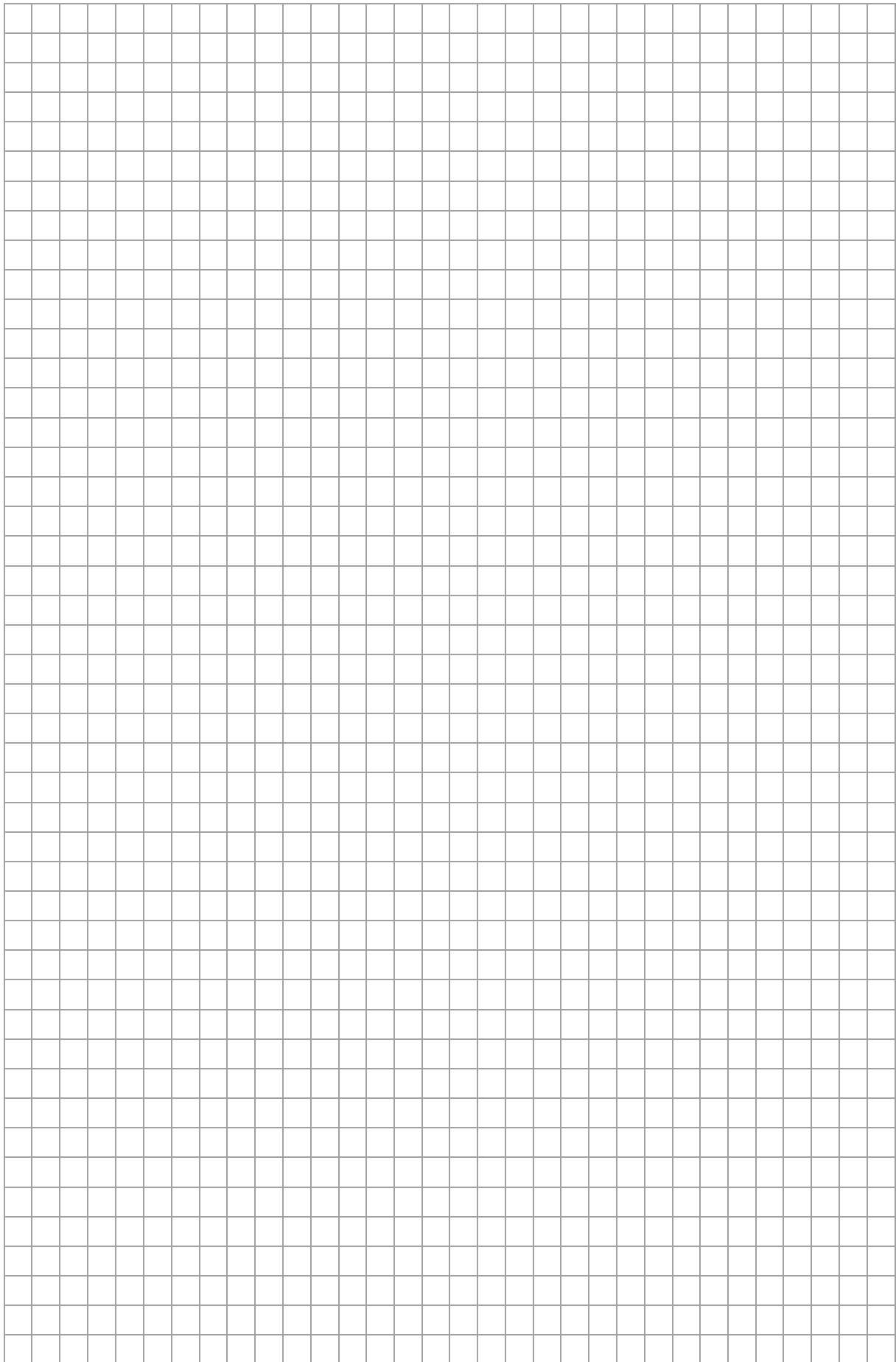
**Zadanie 8. (0–4)**

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)}{\binom{n}{2}}$$

gdzie  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$  jest sumą kolejnych liczb naturalnych nieparzystych. Zapisz obliczenia.



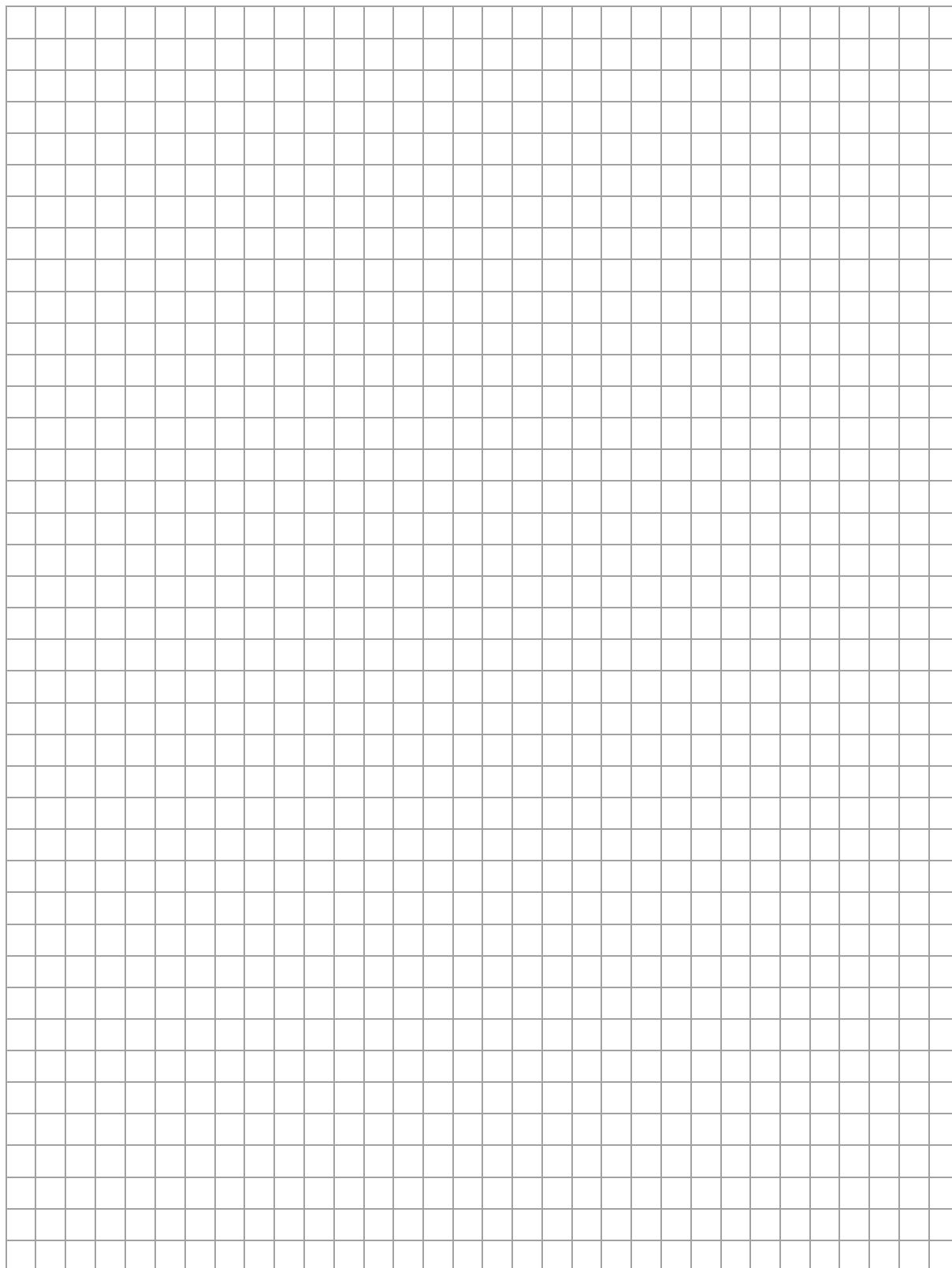


**Zadanie 9. (0–4)**

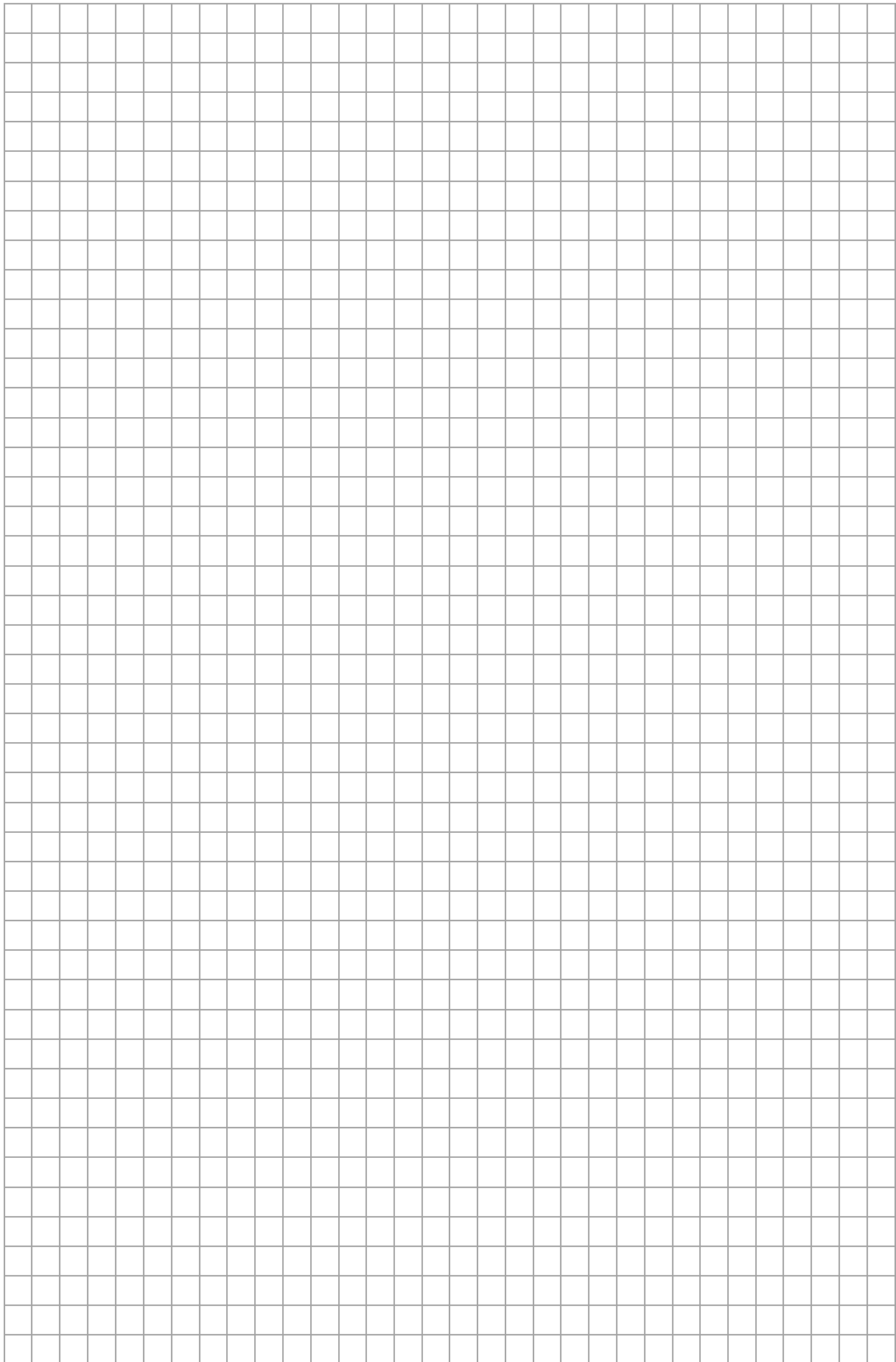
**Rozwiąż równanie**

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

**w zbiorze  $[-\pi, 2\pi]$ . Zapisz obliczenia.**







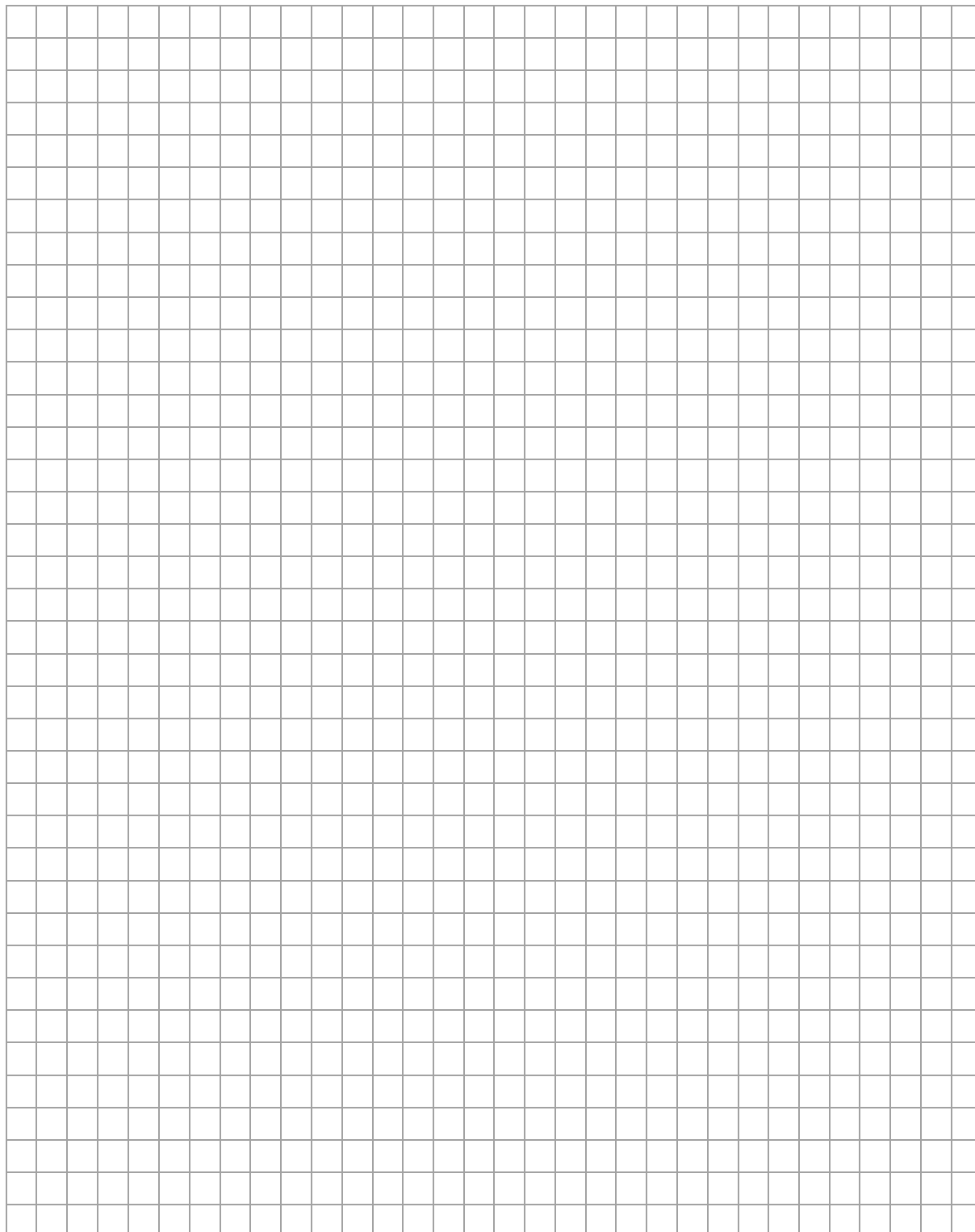
**Zadanie 10. (0–5)**

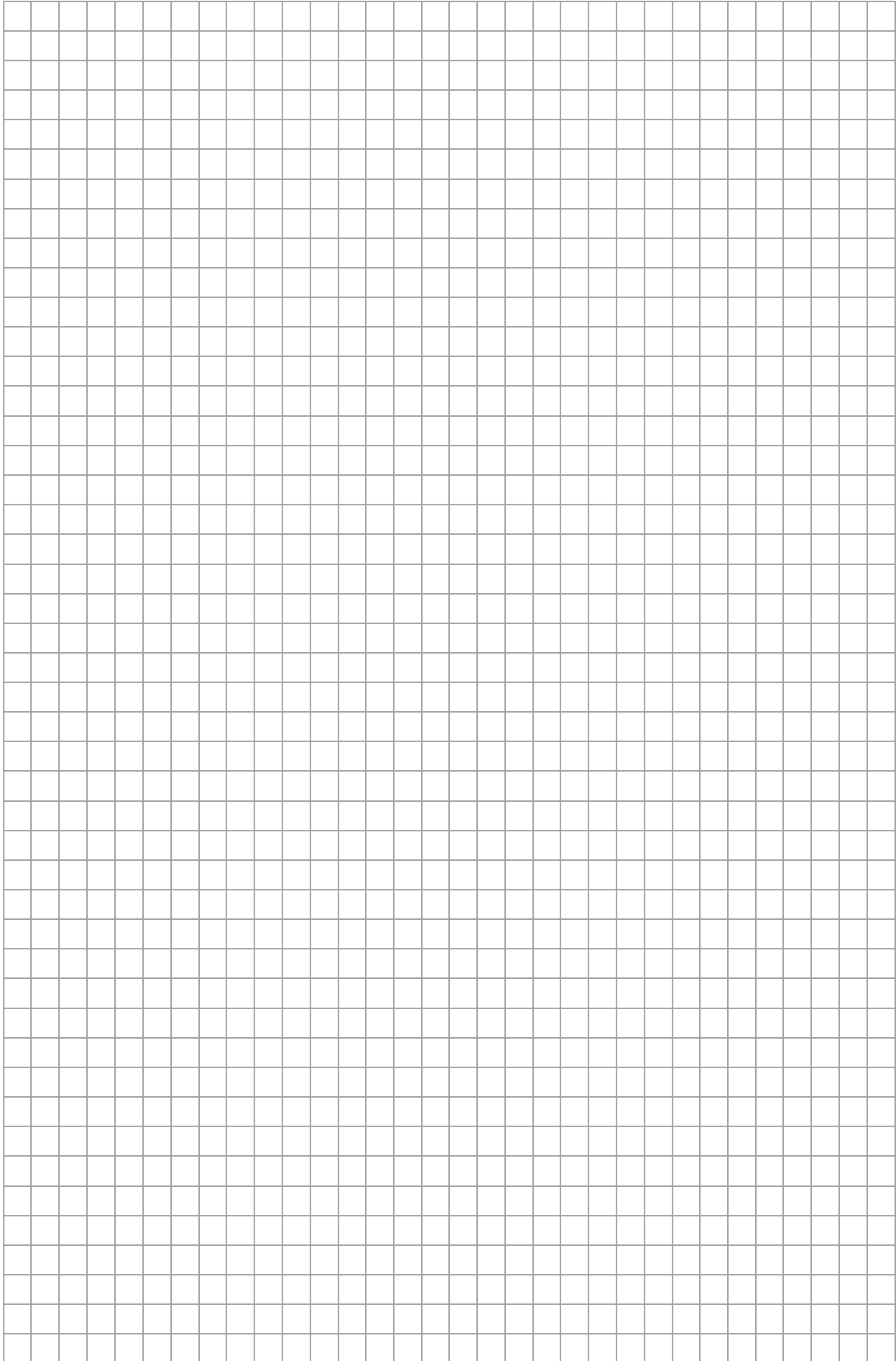
Ciąg  $(a_n)$ , określony dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ , jest arytmetyczny i malejący.

Trzeci i piąty wyraz tego ciągu spełniają warunek  $a_3 + a_5 = 10$ .

Trzywyrazowy ciąg  $(2a_1 + 4, a_4 - 1, -\frac{1}{8}a_7)$  jest geometryczny.

**Oblicz wyrazy tego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.**



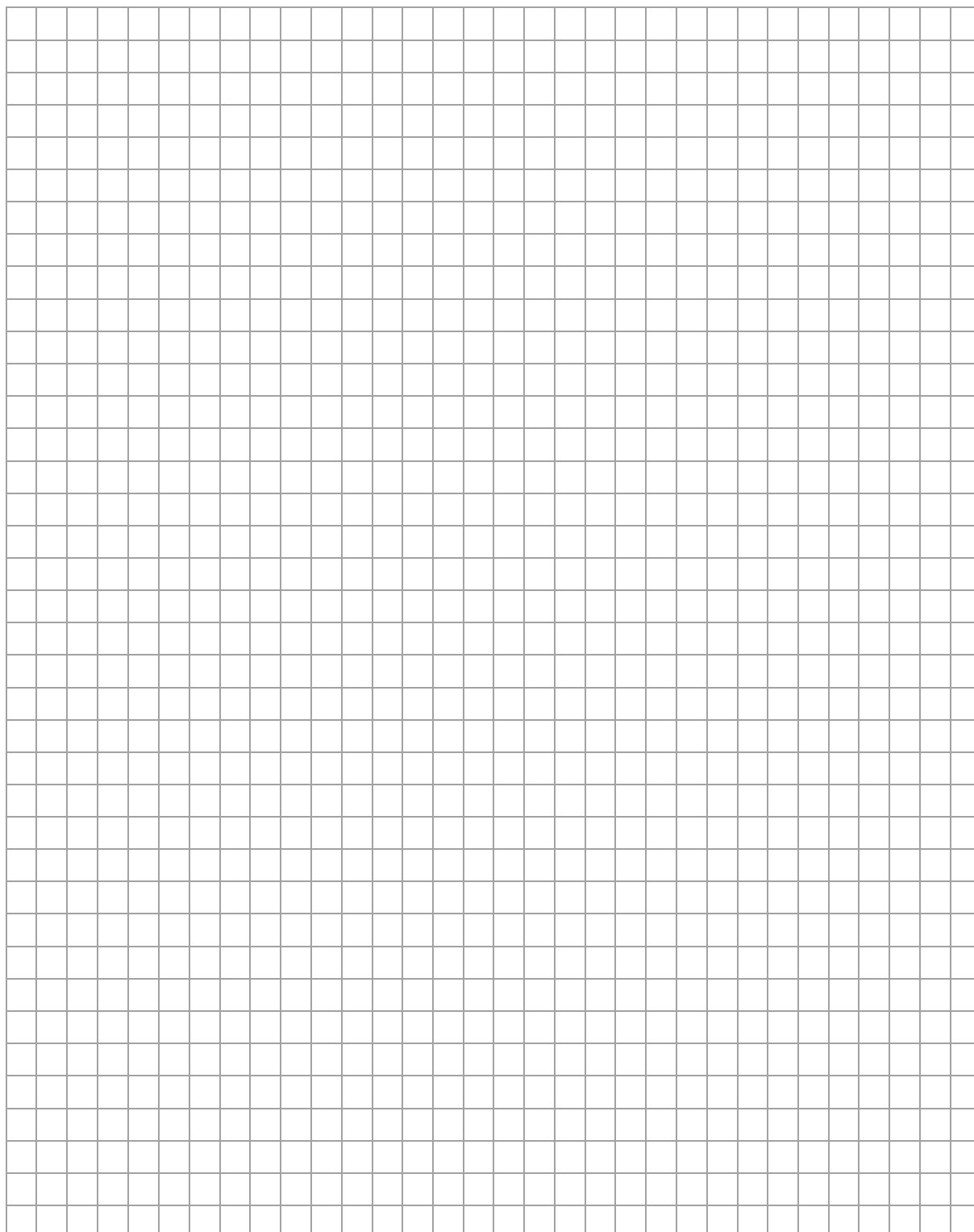


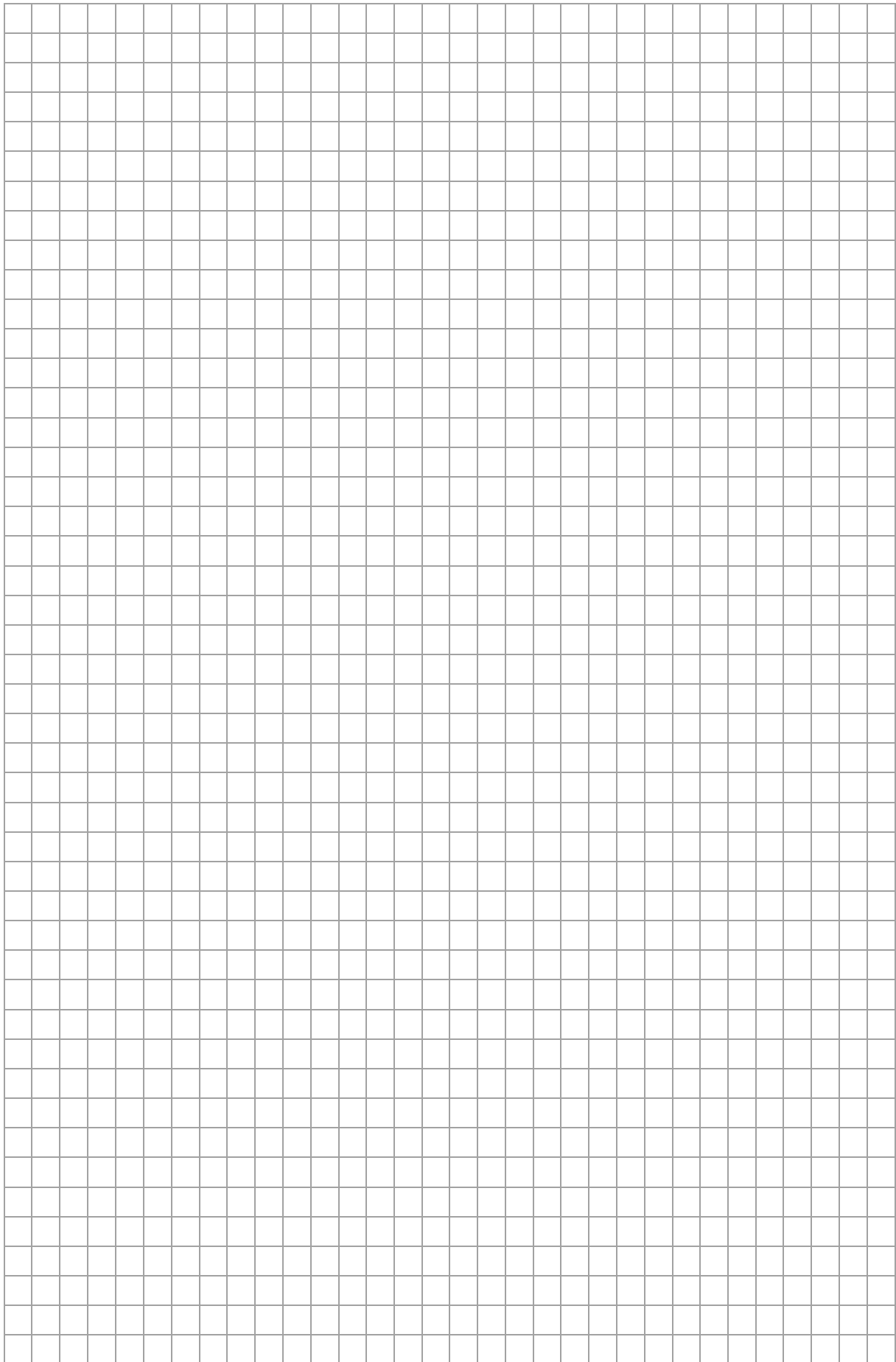
**Zadanie 11. (0–5)**

Funkcja kwadratowa  $f$  zmiennej rzeczywistej  $x$  jest określona wzorem

$$f(x) = x^2 - 3x - m^2 + m + 3$$

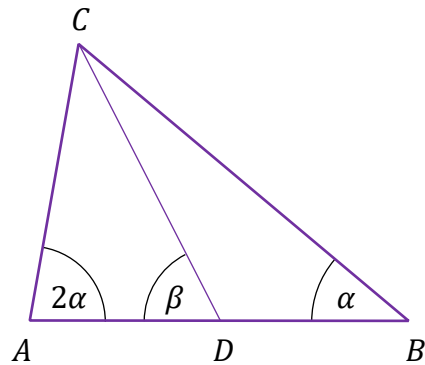
Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których funkcja  $f$  ma dwa różne miejsca zerowe  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ . Zapisz obliczenia.



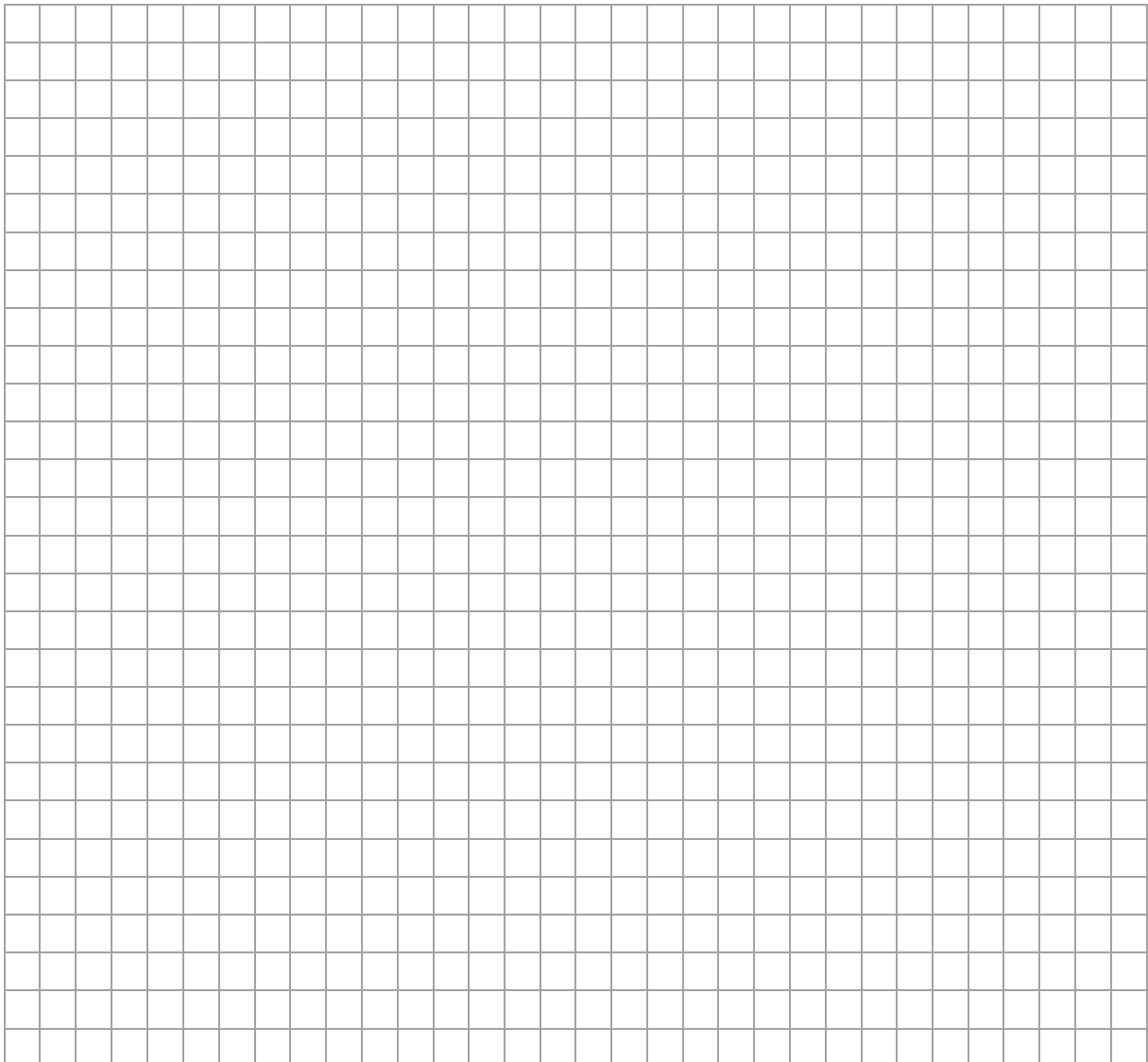


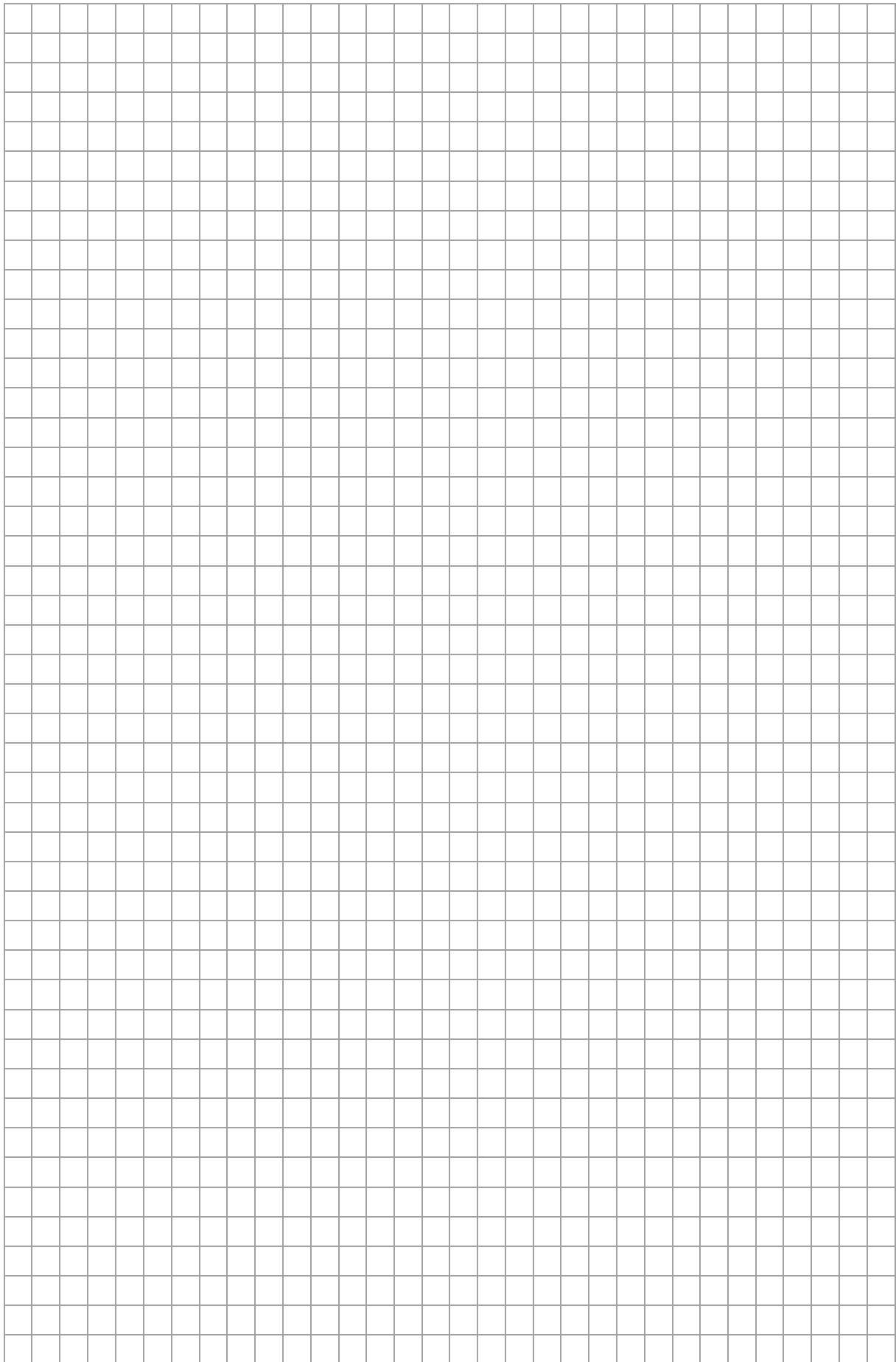
**Zadanie 12. (0–5)**

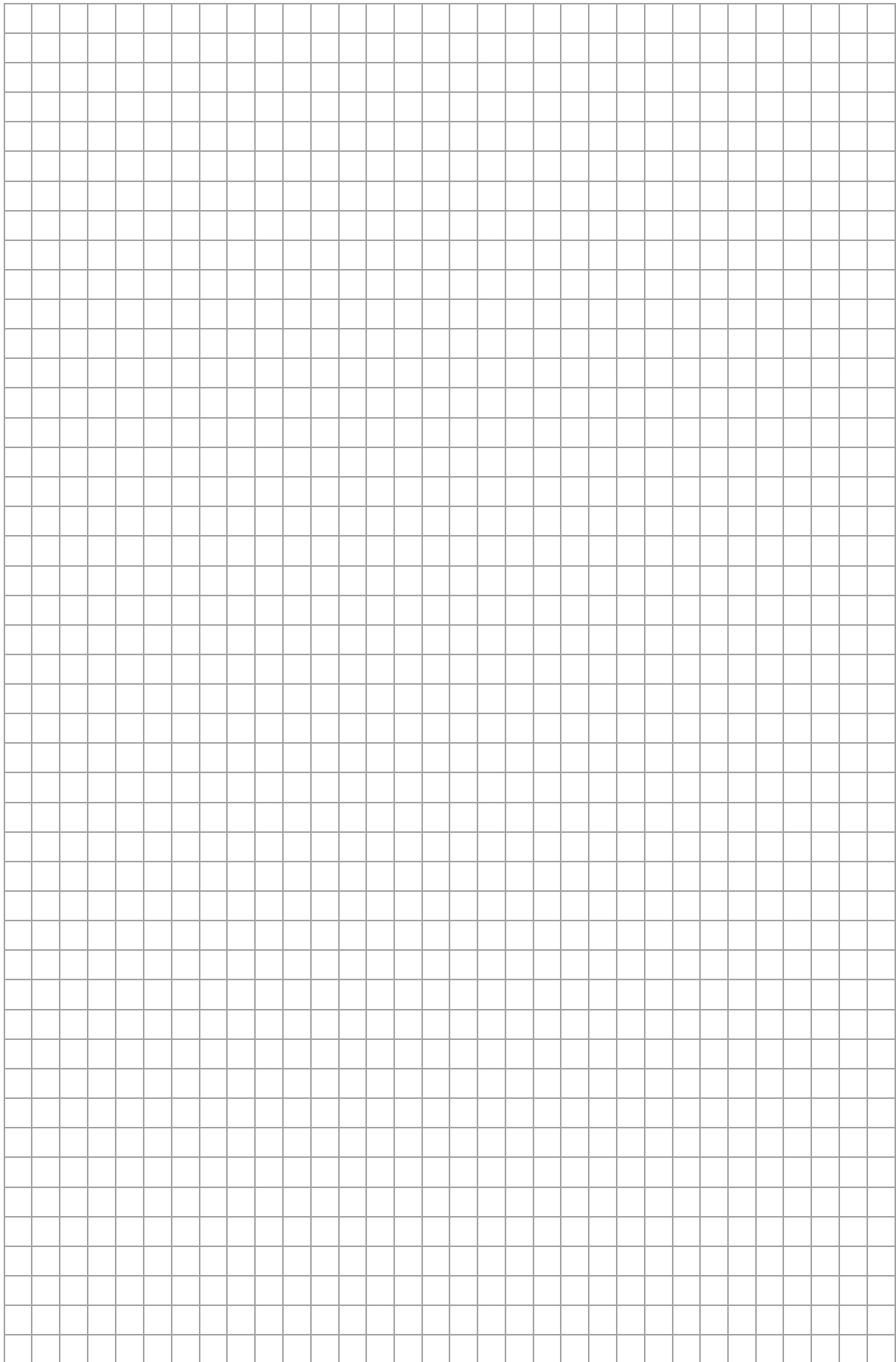
W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  miara kąta  $BAC$  jest dwa razy większa od miary kąta  $ABC$ . Punkt  $D$  jest środkiem boku  $AB$ . Niech  $\alpha$  oznacza miarę kąta  $ABC$ , natomiast  $\beta$  – miarę kąta  $ADC$  (zobacz rysunek).



Oblicz  $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)}$ . Zapisz obliczenia.









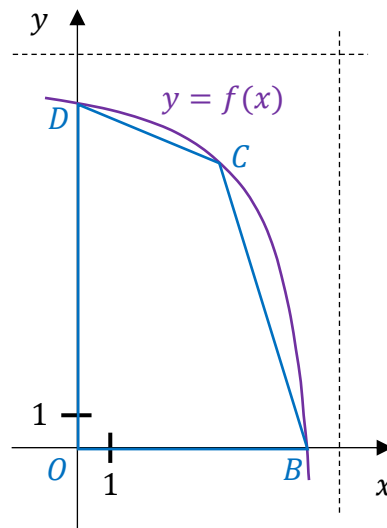
**Zadanie 13.**

Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{12x-84}{x-8}$  dla każdego  $x \in (-\infty, 8)$ .

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  rozważamy wszystkie czworokąty  $OBCD$ , w których:

- wierzchołek  $O$  ma współrzędne  $(0, 0)$
- wierzchołek  $B$  jest punktem przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osią  $Ox$
- wierzchołek  $D$  jest punktem przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osią  $Oy$
- wierzchołek  $C$  ma obie współrzędne dodatnie i leży na wykresie funkcji  $f$

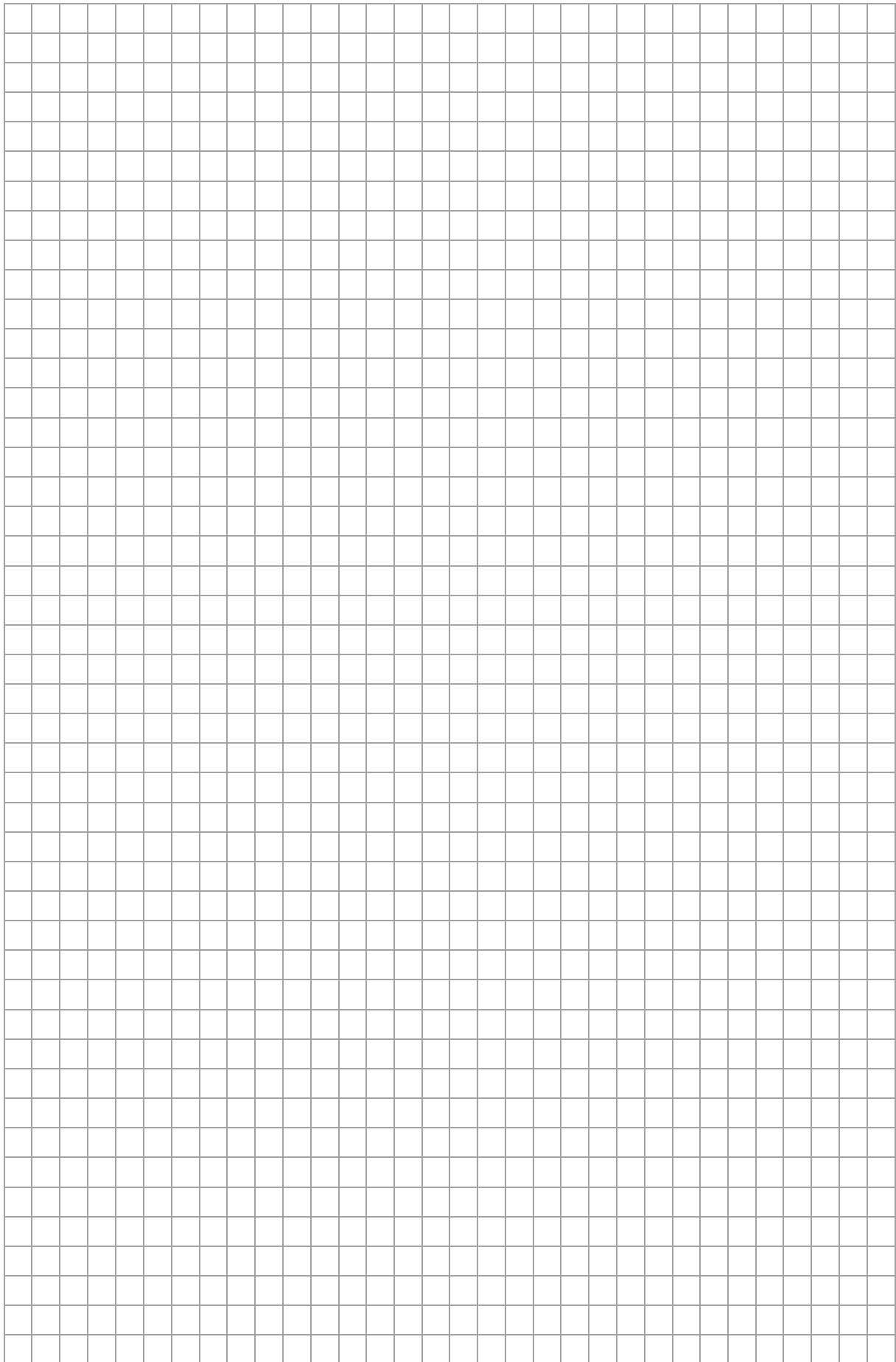
(zobacz rysunek).

**Zadanie 13.1. (0–2)**

Wykaż, że pole  $P$  czworokąta  $OBCD$  w zależności od pierwszej współrzędnej  $x$  punktu  $C$  jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$





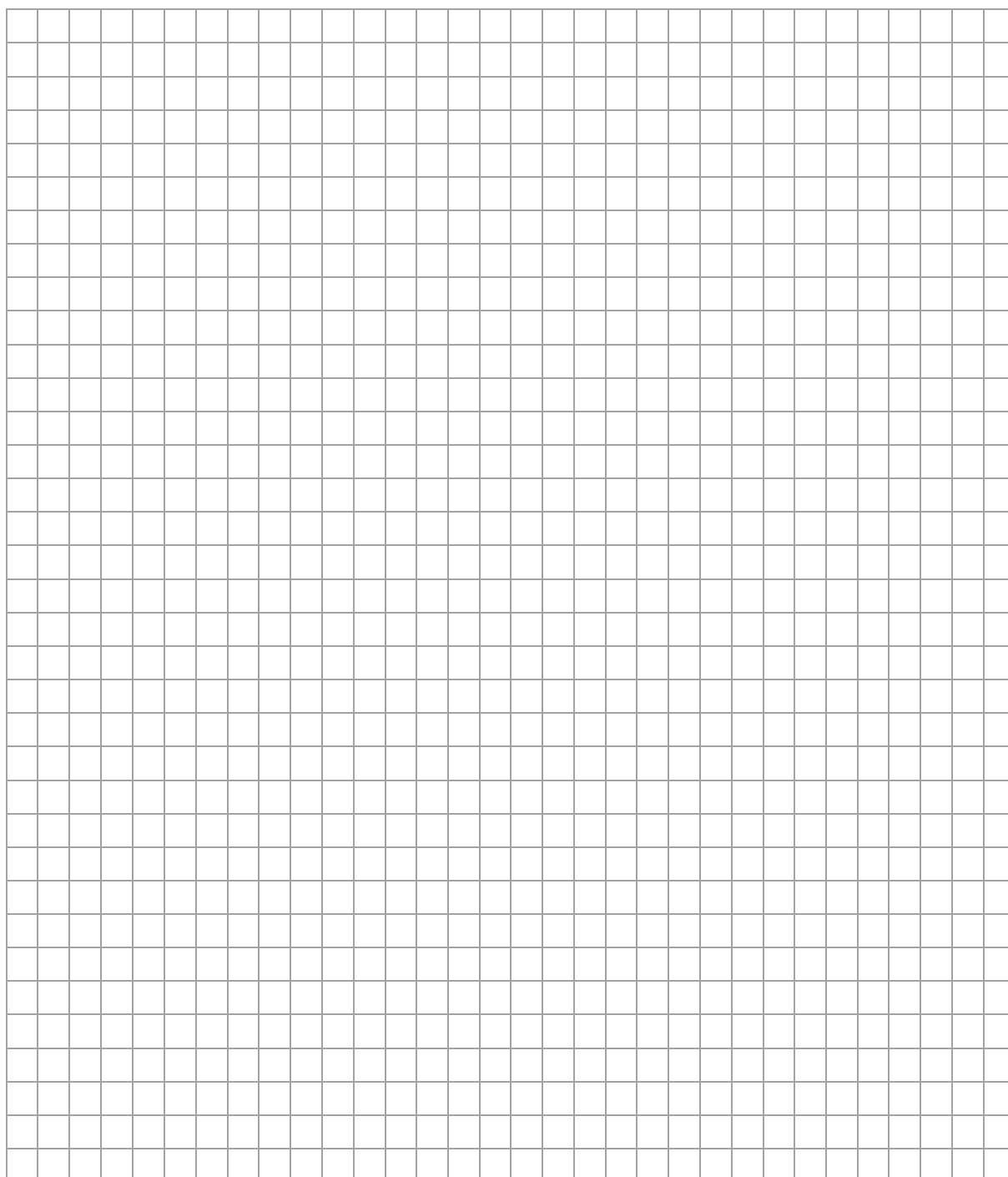
**Zadanie 13.2. (0–4)**

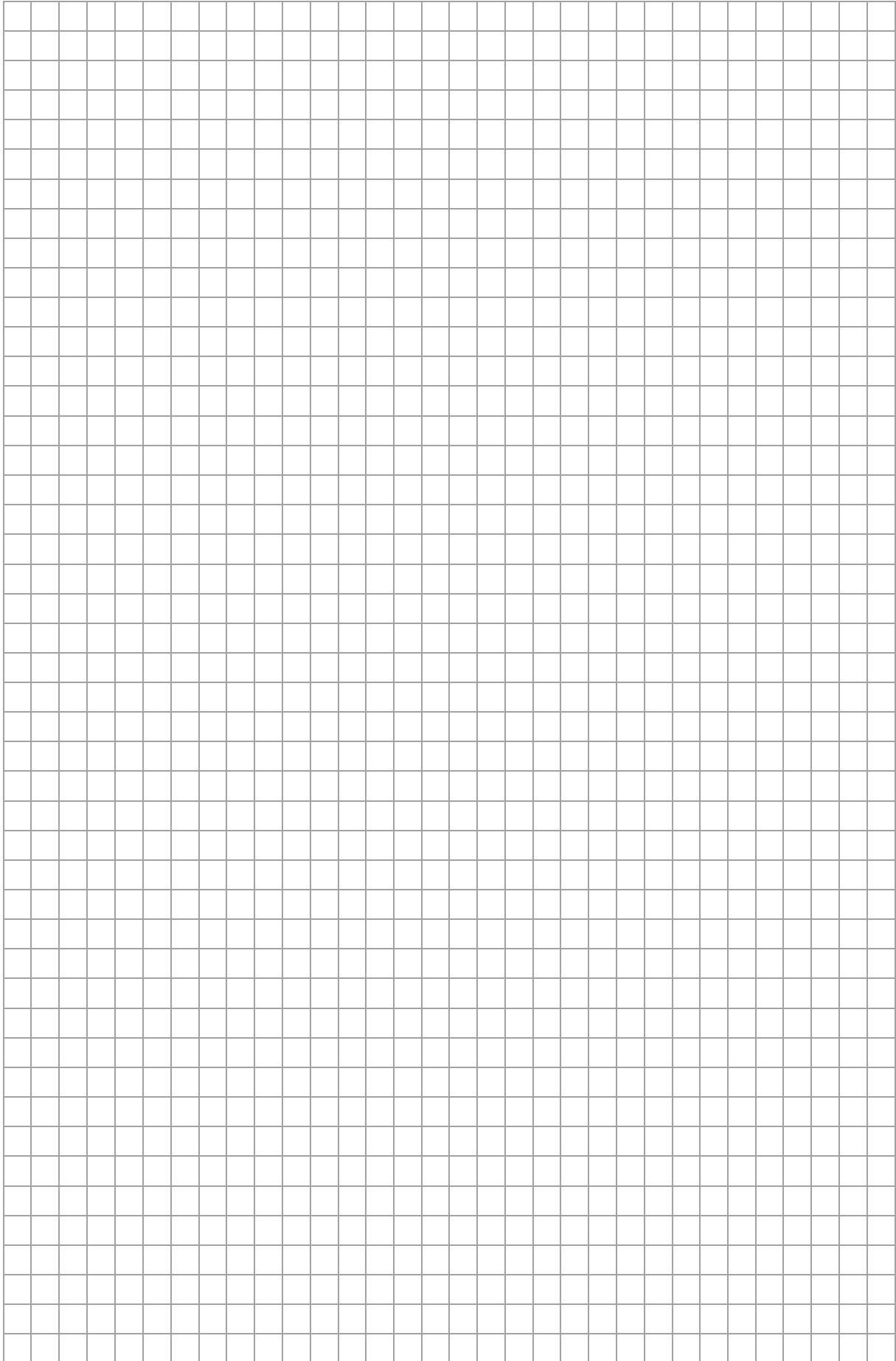
Pole  $P$  czworokąta  $OBOD$  w zależności od pierwszej współrzędnej  $x$  punktu  $C$  jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

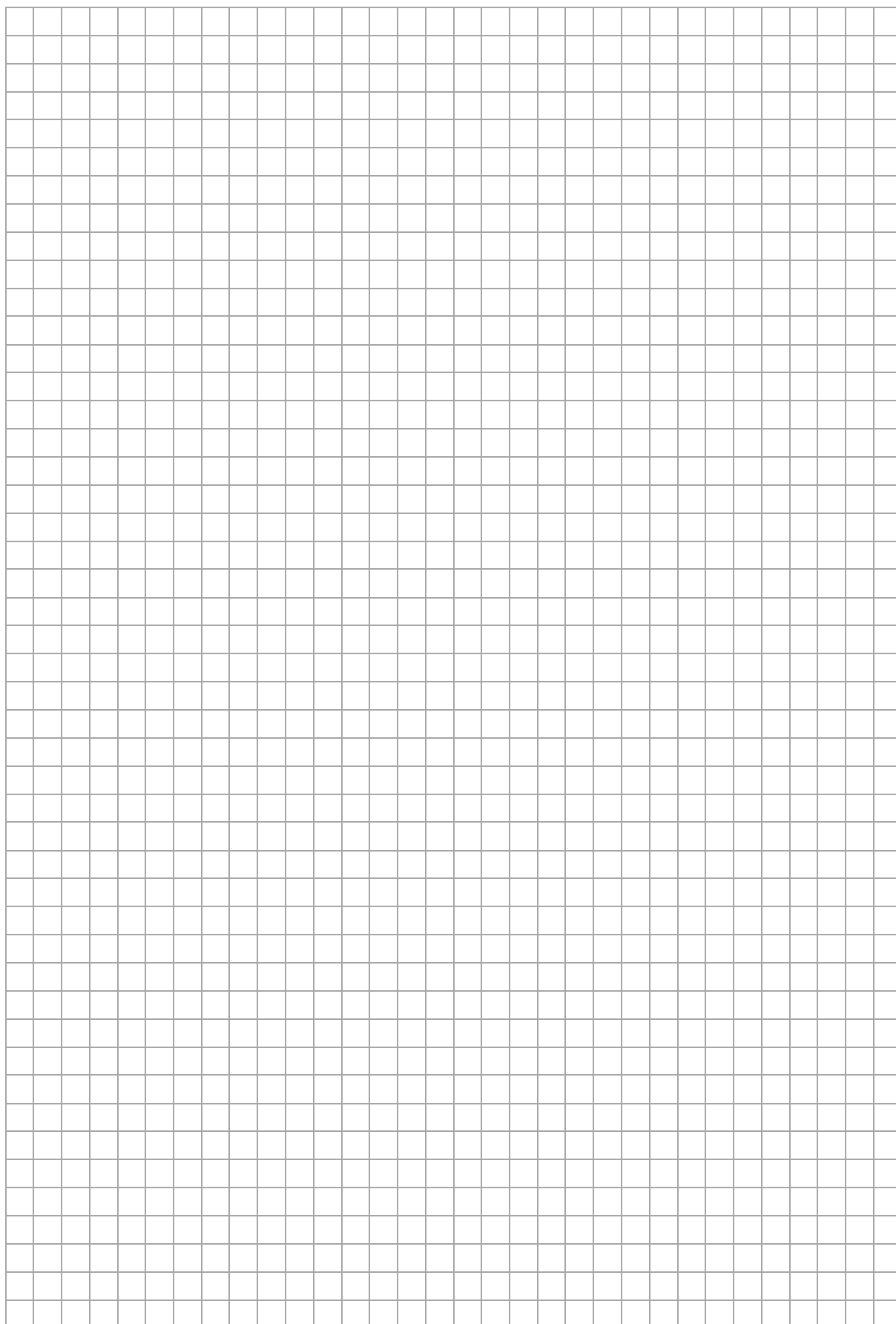
dla  $x \in (0, 7)$ .

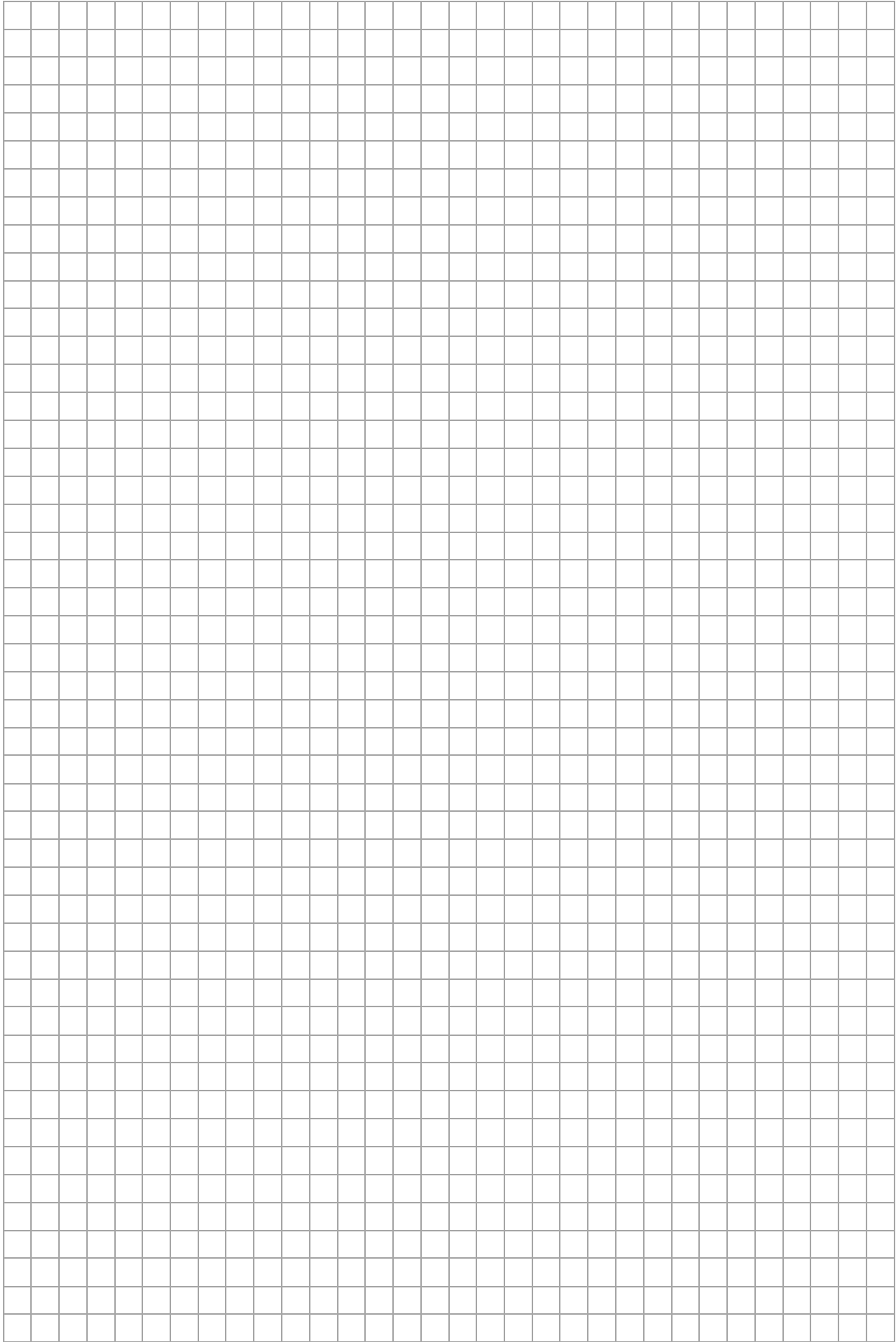
**Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$ , dla których pole czworokąta  $OBOD$  jest największe. Zapisz obliczenia.**





## BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)







# MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

*Formuła 2023*



# MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

*Formuła 2023*



# MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

*Formuła 2023*

