CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny** **TEST DIAGNOSTYCZNY**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-660, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00
Termin egzaminu:	12 grudnia 2024 r.
Data publikacji dokumentu:	13 grudnia 2024 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym […].	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną […] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 6 (milikulombów).

1 pkt – obliczenie Q_0 : $\frac{2}{81}$

ALBO

– obliczenie β: $\frac{1}{3}$,

ALBO

– zapisanie związku $[Q(5)]^2 = Q(4) \cdot Q(6)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Z warunków $Q(4) = 2$ oraz $Q(6) = 18$ otrzymujemy związki $2 = Q_0 \cdot \beta^{-4}$ oraz $18 = Q_0 \cdot \beta^{-6}$. Stąd

$$\frac{2}{18} = \frac{Q_0 \cdot \beta^{-4}}{Q_0 \cdot \beta^{-6}}$$

$$\frac{1}{9} = \beta^2$$

$$\beta = \frac{1}{3}$$

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zatem $2 = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$, więc $Q_0 = \frac{2}{81}$.
Obliczamy $Q(5)$:

$$Q(5) = \frac{2}{81} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = \frac{2}{81} \cdot 3^5 = 6$$

Sposób II
Zauważamy, że ciąg wartości funkcji Q dla kolejnych liczb naturalnych, tj. $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(3)$, …, jest geometryczny, ma wszystkie wyrazy dodatnie, pierwszy wyraz równy Q_0 oraz iloraz $\frac{1}{\beta}$.
Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$[Q(5)]^2 = Q(4) \cdot Q(6)$$

$$[Q(5)]^2 = 2 \cdot 18$$

$$Q(5) = 6$$

W chwili $t = 5$ s w kondensatorze był zgromadzony ładunek 6 milikulombów.

Zadanie 2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – uzasadnienie, że $|CD| = |CE|$

ALBO

– uzasadnienie, że $|AD| = |BE|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

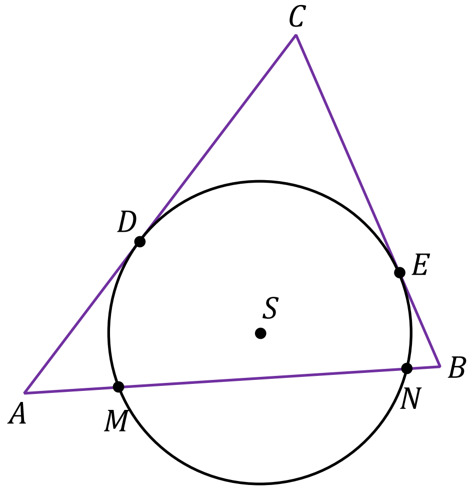
Sposób I

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

D – punkt styczności okręgu $\mathcal{O}$ do boku AC trójkąta,

E – punkt styczności okręgu $\mathcal{O}$ do boku BC trójkąta,

S – środek okręgu $\mathcal{O}$ (zobacz rysunek).



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|CD| = |CE|$.

Ponieważ $|MS| = |NS|$, więc trójkąt MNS jest równoramienny i $|\measuredangle SMN| = |\measuredangle SNM|$.

Zatem $|\measuredangle SMA| = |\measuredangle SNB|$.

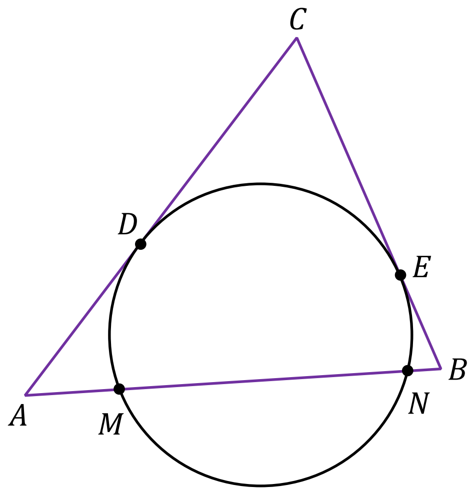
Jeżeli $|AM| = |NB|$, to wówczas trójkąty AMS i BNS będą przystające (na podstawie cechy bkb przystawania trójkątów), czyli $|AS| = |BS|$. Z równości $|AS| = |BS|$ oraz $|DS| = |ES|$, po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa, otrzymamy $|AD| = |BE|$. Stąd

$$|AC| = |AD| + |DC| = |CE| + |EB| = |BC|$$

To należało wykazać.

Sposób II

Oznaczmy przez D punkt styczności okręgu $\mathcal{O}$ do boku AC trójkąta. Niech E będzie punktem styczności okręgu $\mathcal{O}$ do boku BC trójkąta (zobacz rysunek).



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|CD| = |CE|$.
Jeżeli $|AM| = |NB|$, to z twierdzenia o odcinkach siecznej i stycznej otrzymujemy

$$|AD|^2 = |AM| \cdot |AN| = |AM| \cdot (|AM| + |MN|) = |AM| \cdot (|BN| + |MN|) = |AM| \cdot |BM|$$

oraz

$$|BE|^2 = |BN| \cdot |BM| = |AM| \cdot |BM|$$

Zatem $|AD| = |BE|$ i dlatego $|AC| = |AD| + |DC| = |BE| + |CE| = |BC|$.
To należało wykazać.

Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola powierzchni […] walca […].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $18\pi\sqrt{2}$.

2 pkt – obliczenie promienia walca i wysokości walca: $r = \sqrt{6}$ i $h = 3\sqrt{2}$.

1 pkt – zapisanie dwóch równań: $2r \cdot h = 12\sqrt{3}$ i $2\pi r^2 + 2\pi rh = 12\pi\left(\sqrt{3}+1\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech r będzie promieniem podstawy walca, natomiast h – wysokością walca.

Z warunków zadania otrzymujemy $2r \cdot h = 12\sqrt{3}$ oraz $2\pi r^2 + 2\pi rh = 12\pi\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $h = \frac{6\sqrt{3}}{r}$ i podstawiamy w miejsce h do drugiego z równań, otrzymując

$$2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{6\sqrt{3}}{r} = 12\pi(\sqrt{3}+1)$$

$$2\pi r^2 + 12\sqrt{3}\pi = 12\pi(\sqrt{3}+1)$$

$$r^2 = 6$$

Zatem $r = \sqrt{6}$ oraz $h = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{2}$.

Obliczamy objętość V walca:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\pi\sqrt{2}$$

Zadanie 4. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{1}{\log_2 35+1}+\frac{1}{\log_7 140-\log_7 2}+\frac{1}{\log_5 7+\log_5 2+1}$ do postaci $\log_{70} 2+\log_{70} 7+\log_{70} 5$.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{1}{\log_2 35+1}+\frac{1}{\log_7 140-\log_7 2}+\frac{1}{\log_5 7+\log_5 2+1}$ do postaci $\frac{1}{\log_2 70}+\frac{1}{\log_7 70}+\frac{1}{\log_5 70}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosujemy definicję logarytmu oraz wzory na sumę logarytmów oraz na różnicę logarytmów i otrzymujemy

$$\frac{1}{\log_2 35+1}+\frac{1}{\log_7 140-\log_7 2}+\frac{1}{\log_5 7+\log_5 2+1}=$$

$$=\frac{1}{\log_2 35+\log_2 2}+\frac{1}{\log_7 70}+\frac{1}{\log_5 7+\log_5 2+\log_5 5}=$$

$$=\frac{1}{\log_2 70}+\frac{1}{\log_7 70}+\frac{1}{\log_5 70}$$

Stąd, po zastosowaniu wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz na logarytm sumy, dostajemy

$$\frac{1}{\log_2 70}+\frac{1}{\log_7 70}+\frac{1}{\log_5 70}=\log_{70} 2+\log_{70} 7+\log_{70} 5=\log_{70} 70=1$$

Zatem

$$\frac{1}{\log_2 35+1}+\frac{1}{\log_7 140-\log_7 2}+\frac{1}{\log_5 7+\log_5 2+1}=1$$

To należało wykazać.

Zadanie 5. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R1) […] stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $0{,}49$.

2 pkt – zastosowanie twierdzenia Bayesa i zapisanie $P(B_1|A) = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}7}{0{,}7 \cdot 0{,}35 + 0{,}4 \cdot 0{,}65}$.

1 pkt – zapisanie prawdopodobieństw: $P(B_1) = 0{,}35$ i $P(A|B_1) = 0{,}7$ oraz $P(B_2) = 0{,}65$, oraz $P(A|B_2) = 0{,}4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zbiór zdarzeń elementarnych Ω to zbiór osób w badanej społeczności.
Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:
A – losowo wybrana osoba dobrze włada językiem niemieckim,
B_1 – losowo wybrana osoba ma wyższe wykształcenie,
B_2 – losowo wybrana osoba nie ma wyższego wykształcenia.
Zgodnie z warunkami zadania $B_1 \cup B_2 = \Omega$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ oraz

$$P(B_1) = 0{,}35$$

$$P(B_2) = 0{,}65$$

$$P(A) > 0$$

Niech $B_1|A$ oznacza zdarzenie: losowo wybrana osoba ma wyższe wykształcenie, pod warunkiem, że dobrze włada językiem niemieckim.
Z warunków zadania

$$P(A|B_1) = 0{,}7$$

$$P(A|B_2) = 0{,}4$$

Obliczamy $P(B_1|A)$, korzystając z twierdzenia Bayesa:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}7}{0{,}7 \cdot 0{,}35 + 0{,}4 \cdot 0{,}65} =$$

$$= 0,(4851) \approx 0{,}49$$

Zadanie 6. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.R4) rozwiązuje równania […] z wartością bezwzględną.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{2}{5}$ oraz $\frac{14}{3}$.

3 pkt – rozwiązanie równania w dwóch spośród rozważanych przedziałów/przypadków (o ile zdający rozpatruje równanie w przedziałach/przypadkach, których suma jest równa $\mathbb{R}$/wyczerpujących zbiór $\mathbb{R}$)
ALBO
– rozwiązanie równania $4x - 8 = |x + 2| + 4$ (dla sposobu II),
ALBO
– rozwiązanie równania $4x - 8 = -|x + 2| - 4$ (dla sposobu II).

2 pkt – zastosowanie definicji wartości bezwzględnej lub własności wartości bezwzględnej i zapisanie danego równania odpowiednio w trzech przedziałach: $(-\infty, -2)$, $[-2, 2)$, $[2, +\infty)$, lub w czterech przypadkach: $x + 2 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 2 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 2 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 2 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$
ALBO
– zapisanie równania w postaci równoważnej alternatywy dwóch równań: $4x - 8 = |x + 2| + 4$ lub $4x - 8 = -|x + 2| - 4$ (dla sposobu II).

1 pkt – przekształcenie danego równania do postaci $4 \cdot |x - 2| = |x + 2| + 4$
ALBO
– przekształcenie danego równania do postaci $|4x - 8| = |x + 2| + 4$,
ALBO
– zapisanie przedziałów: $(-\infty, -2)$, $[-2, 2)$, $[2, +\infty)$, oraz zapisanie danego równania w jednym z tych przedziałów bez użycia symbolu wartości bezwzględnej
ALBO
– zapisanie jednego z przedziałów: $(-\infty, -2)$, $[-2, 2)$, $[2, +\infty)$, oraz rozwiązanie danego równania w tym przedziale.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ $|4x - 8| = 4 \cdot |x - 2|$ oraz $|2 - x| = |x - 2|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc równanie $|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$ można przekształcić równoważnie do postaci

$$4 \cdot |x - 2| = |x + 2| + 4$$

Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x \in (-\infty, -2)$)
W tym przypadku równanie ma postać $-4x + 8 = -x - 2 + 4$, czyli $x = 2$.
Ponieważ $2 \notin (-\infty, -2)$, więc liczba 2 nie jest rozwiązaniem równania.

Przypadek 2. (gdy $x \in [-2, 2)$)
W tym przypadku równanie ma postać $-4x + 8 = x + 2 + 4$, czyli $x = \frac{2}{5}$.
Ponieważ $\frac{2}{5} \in [-2, 2)$, więc liczba $\frac{2}{5}$ jest rozwiązaniem równania.

Przypadek 3. (gdy $x \in [2, +\infty)$)
W tym przypadku równanie ma postać $4x - 8 = x + 2 + 4$, czyli $x = \frac{14}{3}$.
Ponieważ $\frac{14}{3} \in [2, +\infty)$, więc liczba $\frac{14}{3}$ jest rozwiązaniem równania.
Ostatecznie rozwiązaniami danego równania są liczby $\frac{2}{5}$ oraz $\frac{14}{3}$.

Sposób II
Ponieważ $|2 - x| = |x - 2|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc równanie
$|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$ można przekształcić równoważnie do postaci

$$|4x - 8| = |x + 2| + 4$$

Ponieważ wyrażenie $|x + 2| + 4$ jest dodatnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc równanie
$|4x - 8| = |x + 2| + 4$ można zapisać równoważnie jako alternatywę równań:

$$4x - 8 = |x + 2| + 4 \quad \vee \quad 4x - 8 = -|x + 2| - 4$$

Stąd

$$|x + 2| = 4x - 12 \quad \vee \quad |x + 2| = 4 - 4x$$

Rozwiązujemy równanie $|x + 2| = 4x - 12$:

$$4x - 12 \geq 0 \quad \wedge \quad (x + 2 = 4x - 12 \quad \vee \quad x + 2 = -4x + 12)$$

$$x \geq 3 \quad \wedge \quad \left(x = \frac{14}{3} \quad \vee \quad x = 2\right)$$

Ponieważ $\frac{14}{3} \in [3, +\infty)$ i $2 \notin [3, +\infty)$, więc rozwiązaniem równania
$|x + 2| = 4x - 12$ jest liczba $\frac{14}{3}$.

Rozwiązujemy równanie $|x + 2| = 4 - 4x$:

$$4 - 4x \geq 0 \quad \wedge \quad (x + 2 = 4 - 4x \quad \vee \quad x + 2 = -4 + 4x)$$

$$x \leq 1 \quad \wedge \quad \left(x = \frac{2}{5} \quad \vee \quad x = 2\right)$$

Ponieważ $\frac{2}{5} \in (-\infty, 1]$ i $2 \notin (-\infty, 1]$, więc rozwiązaniem równania $|x+2| = 4 - 4x$ jest liczba $\frac{2}{5}$.

Rozwiązaniami równania $|4x-8| + |x-2| = |2-x| + |x+2| + 4$ są liczby $\frac{2}{5}$ oraz $\frac{14}{3}$.

Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R1) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu; IX.R4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej […].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $C = \left(\sqrt{5} - 1, 3\sqrt{5} + 3\right)$ lub $C = \left(-\sqrt{5} - 1, -3\sqrt{5} + 3\right)$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu C), np. $(x+1)^2 + (3x+6-3)^2 = 50$.

2 pkt – wyznaczenie równania symetralnej odcinka AB: $y = 3x + 6$.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $\left(-\frac{1}{3}\right)$

ALBO

– zapisanie równości $\sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x+6)^2 + (y-8)^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunku $|AC| = |BC|$ wynika, że punkt C leży na symetralnej odcinka AB.

Współczynnik kierunkowy a_{AB} prostej AB jest równy $a_{AB} = \frac{8-4}{-6-6} = -\frac{1}{3}$, więc współczynnik kierunkowy prostej, która jest symetralną odcinka AB, jest równy $a = 3$.

Obliczamy współrzędne środka M odcinka AB:

$$M = \left(\frac{6 + (-6)}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = (0, 6)$$

Ponieważ ta symetralna przechodzi przez punkt M, więc ma ona równanie $y = 3(x - 0) + 6$, czyli $y = 3x + 6$.

Obliczamy współrzędne punktu C, który jest punktem przecięcia symetralnej odcinka AB z danym okręgiem:

$$(x+1)^2 + (3x+6-3)^2 = 50$$

$$(x+1)^2 + 9(x+1)^2 = 50$$

$$(x+1)^2 = 5$$

$$|x+1| = \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{5} - 1 \quad \vee \quad x = -\sqrt{5} - 1$$

Gdy $x = \sqrt{5} - 1$, to $y = 3\left(\sqrt{5} - 1\right) + 6 = 3\sqrt{5} + 3$, więc wtedy $C = \left(\sqrt{5} - 1, 3\sqrt{5} + 3\right)$.

Gdy $x = -\sqrt{5} - 1$, to $y = 3\left(-\sqrt{5} - 1\right) + 6 = -3\sqrt{5} + 3$, więc wtedy $C = \left(-\sqrt{5} - 1, -3\sqrt{5} + 3\right)$.

Odp. $C = \left(\sqrt{5} - 1, 3\sqrt{5} + 3\right)$ lub $C = \left(-\sqrt{5} - 1, -3\sqrt{5} + 3\right)$.

Zadanie 8. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VI.R1) oblicza granice ciągów […].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

3 pkt – wyznaczenie sumy $1+3+5+7+\ \dots\ +(2n+1)$: $(n+1)^2$ **oraz** zapisanie symbolu Newtona $\binom{n}{2}$ w postaci $\frac{n(n-1)}{2}$.

2 pkt – wyznaczenie liczby składników sumy $1+3+5+7+\ \dots\ +(2n+1)$: $(n+1)$ **oraz** zapisanie symbolu Newtona $\binom{n}{2}$ w postaci $\frac{n(n-1)}{2}$

ALBO

– wyznaczenie sumy $1+3+5+7+\ \dots\ +(2n+1)$: $(n+1)^2$.

1 pkt – wyznaczenie liczby składników sumy $1+3+5+7+\ \dots\ +(2n+1)$: $(n+1)$

ALBO

– zapisanie symbolu Newtona $\binom{n}{2}$ w postaci $\frac{n(n-1)}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający przyjmie, że liczba składników sumy $1+3+5+7+\ \dots\ +(2n+1)$ jest równa n i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Kolejne składniki sumy $1+3+5+7+\ \dots\ +(2n+1)$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie $a_1=1$ oraz różnicy $r=2$.

Niech k oznacza liczbę składników tej sumy. Wyznaczamy k:

$$a_k = a_1 + (k-1)\cdot r$$

$$2n+1 = 1 + (k-1)\cdot 2$$

$$k = n+1$$

Zatem suma składa się z $(n+1)$ składników.

Stosując wzór na sumę $(n+1)$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, otrzymujemy

$$1+3+5+7+\ \dots\ +(2n+1) = \frac{[1+(2n+1)]}{2}\cdot(n+1) = (n+1)^2$$

Wyznaczamy współczynnik dwumianowy:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3+5+7+\ \dots\ +(2n+1)}{\binom{n}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{\frac{n(n-1)}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+4n+2}{n^2-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} = 2$$

Zadanie 9. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania (dla sposobu I)

4 pkt – zapisanie, że równanie $\sin(2x) = -2$ nie ma rozwiązań oraz rozwiązanie równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{1}{4}\pi + \pi \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– rozwiązanie równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

2 pkt – przekształcenie równania do alternatywy równań $\sin(2x) = -2$ lub $\sin(2x) = 1$.

1 pkt – przekształcenie równania do postaci

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \sin x \cdot \cos x$$

ALBO

– zastosowanie tożsamości $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$,

ALBO

– zastosowanie tożsamości $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

4 pkt – spełnienie kryterium za 3 punkty oraz sprawdzenie rachunkiem, że liczby $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$ spełniają równanie $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{1}{4}\pi + \pi \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– rozwiązanie równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

2 pkt – wykorzystanie równości $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ i przekształcenie nierówności $\sqrt{\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{2}} \geq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}$ do postaci $\sin(2x) \geq 1$.

1 pkt – zastosowanie nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną i zapisanie nierówności $\sqrt{\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{2}} \geq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

3 pkt – równoważne przekształcenie równania do alternatywy równań $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$ lub $\sin x - \cos x = 0$ i rozwiązanie równań tej alternatywy w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{1}{4}\pi + \pi \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci $(\sin^3 x - \cos^3 x)(\sin x - \cos x) = 0$.

1 pkt – przekształcenie równania do postaci $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.
Jeżeli zdający przekształci równanie do postaci $(\sin^3 x - \cos^3 x)(\sin x - \cos x) = 0$, a następnie rozwiąże poprawnie równania $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$ oraz $\sin x - \cos x = 0$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$, to otrzymuje **4 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równanie równoważnie, korzystając ze wzoru na kwadrat sumy oraz z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin x \cdot \cos x$$

$$1 - 2(\sin x \cdot \cos x)^2 = \sin x \cdot \cos x$$

Korzystamy ze wzoru na sinus podwojonego kąta i otrzymujemy dalej

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\sin^2(2x) + \sin(2x) - 2 = 0$$

$$\sin(2x) = 1 \quad \vee \quad \sin(2x) = -2$$

Rozwiązujemy równanie $\sin(2x) = 1$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

Rozwiązaniami równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$ są liczby: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

Równanie $\sin(2x) = -2$ nie ma rozwiązań w zbiorze $\mathbb{R}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$ są liczby: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

Sposób II

Korzystamy z nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną i otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{2}} \geq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}$$

Stąd, po zastosowaniu tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i wzoru na sinus podwojonego kąta oraz związku $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$, dostajemy kolejno:

$$\sqrt{\frac{\sin x \cdot \cos x}{2}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin(2x) \geq 1$$

Stąd i z własności funkcji sinus wynika, że $\sin(2x) = 1$.
Zatem

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

Gdy $x = -\frac{3}{4}\pi$, to wtedy

$$\sin^4\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) - \cos^4\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

więc liczba $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$ jest rozwiązaniem równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$.
Gdy $x = \frac{1}{4}\pi$, to wtedy

$$\sin^4\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - \cos^4\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

więc liczba $\frac{1}{4}\pi$ jest rozwiązaniem równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$.

Gdy $x = \frac{5}{4}\pi$, to wtedy

$$\sin^4\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) - \cos^4\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

więc liczba $\frac{5}{4}\pi$ jest rozwiązaniem równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$.

Zatem rozwiązaniami równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$ są liczby: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

Sposób III

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sin^4 x - \sin^3 x \cdot \cos x + \cos^4 x - \cos^3 x \cdot \sin x = 0$$

$$\sin^3 x\,(\sin x - \cos x) + \cos^3 x\,(\cos x - \sin x) = 0$$

$$(\sin^3 x - \cos^3 x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\sin^3 x = \cos^3 x \quad \vee \quad \sin x = \cos x$$

$$\sin x = \cos x \quad \vee \quad \sin x = \cos x$$

$$\sin x = \cos x$$

Gdyby $\cos x = 0$, to wtedy $\sin x = \cos x = 0$, więc wstawiając te wartości do tożsamości trygonometrycznej $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, otrzymalibyśmy $0 + 0 = 1$. To oznacza, że $\cos x \neq 0$, więc możemy obie strony równania $\sin x = \cos x$ podzielić obustronnie przez $\cos x$ i otrzymujemy $\operatorname{tg} x = 1$. To równanie w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$ ma trzy rozwiązania: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

Zatem rozwiązaniami równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$ są liczby: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań […].

Zasady oceniania

5 pkt – odrzucenie ciągu odpowiadającego $r = \frac{11}{3}$ i obliczenie wyrazów ciągu geometrycznego: $\left(32, 4, \frac{1}{2}\right)$.

4 pkt – rozwiązanie równania z jedną niewiadomą r: $r = -3$ oraz $r = \frac{11}{3}$

ALBO

– rozwiązanie równania z jedną niewiadomą a_1: $a_1 = 14$ oraz $a_1 = -6$.

3 pkt – zapisane równania z jedną niewiadomą (a_1 lub r), np.

$4^2 = -\frac{1}{8}(5 + 3r) \cdot (10 - 6r + 4)$, $4^2 = -\frac{1}{8}(10 - a_1) \cdot (4 + 2a_1)$.

2 pkt – zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi a_1 i r, np.

$a_1 + 2r + a_1 + 4r = 10$ i $(a_1 + 3r - 1)^2 = -\frac{1}{8}(a_1 + 6r)(2a_1 + 4)$

ALBO

– zapisanie związku $4^2 = -\frac{1}{8}a_7 \cdot (2a_1 + 4)$.

1 pkt – zastosowanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie związku

$(a_4 - 1)^2 = -\frac{1}{8}a_7 \cdot (2a_1 + 4)$

ALBO

– zastosowanie wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisanie równania z dwiema niewiadomymi a_1 i r, np. $a_1 + 2r + a_1 + 4r = 10$,

ALBO

– obliczenie a_4 : $a_4 = 5$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający obliczy wyrazy ciągów geometrycznych odpowiadające wartościom $r = -3$ oraz $r = \frac{11}{3}$ i w odpowiedzi końcowej nie odrzuci ciągu $(-8, 4, -2)$, to otrzymuje **4 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech r oznacza różnicę ciągu (a_n). Z warunków zadania oraz ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_3 + a_5 = 10$$

$$a_1 + 2r + a_1 + 4r = 10$$

$$a_1 = 5 - 3r$$

Z warunków zadania i z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$(a_4 - 1)^2 = -\frac{1}{8}a_7 \cdot (2a_1 + 4)$$

$$(a_1 + 3r - 1)^2 = -\frac{1}{8}(a_1 + 6r)(2a_1 + 4)$$

Stąd i ze związku $a_1 = 5 - 3r$ dostajemy kolejno

$$(5 - 3r + 3r - 1)^2 = -\frac{1}{8}(5 - 3r + 6r)(10 - 6r + 4)$$

$$16 = -\frac{1}{8}(3r + 5)(14 - 6r)$$

$$18r^2 - 12r - 198 = 0$$

$$r = -3 \quad \vee \quad r = \frac{11}{3}$$

Dla $r = \frac{11}{3}$ ciąg (a_n) jest rosnący, więc warunki zadania nie są spełnione.
Dla $r = -3$ ciąg (a_n) jest malejący, $a_1 = 14$ oraz $a_3 + a_5 = 8 + 2 = 10$. Wtedy również $\left(2a_1 + 4, a_4 - 1, -\frac{1}{8}a_7\right) = \left(32, 4, \frac{1}{2}\right)$. Ciąg $\left(32, 4, \frac{1}{2}\right)$ jest geometryczny, więc jest jedynym rozwiązaniem zadania.

Zadanie 11. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania […] kwadratowe z parametrami […].

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi

$$3^2 - 4 \cdot (-m^2 + m + 3) \leq 16: \ m \in \left[\frac{1-2\sqrt{5}}{2}, \frac{1+2\sqrt{5}}{2}\right].$$

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$, np. $3^2 - 4 \cdot (-m^2 + m + 3) \leq 16$.

1 pkt – przekształcenie nierówności $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie jednokrotne zastosowanie wzorów Viète'a, np. $|x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \leq 12$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie dwa warunki: $\Delta > 0$ i $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$: $m \in \left[\frac{1-2\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1+2\sqrt{5}}{2}\right]$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki $\Delta > 0$ i $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$:

$$m \in \left[\frac{1-2\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1+2\sqrt{5}}{2}\right].$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w etapie I lub II popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za III etap otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający w etapach I i II nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I i II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że $x_1 + x_2 = \pm(\pm m^2 + m + 3)$ lub $x_1 \cdot x_2 = \pm 3$, lub $x_1 + x_2 = \pm\frac{b}{2a}$, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty (**1 punkt za przekształcenie nierówności $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie jednokrotne zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za <u>konsekwentne</u> rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.

4. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd, który nie jest rachunkowy, np.:
- pominie istotne nawiasy przy przekształcaniu nierówności $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów Viète'a
- przyjmie, że $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$

i konsekwentnie do popełnionego błędu doprowadzi rozwiązanie II etapu zadania do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za II etap (1 punkt za zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za <u>konsekwentne</u> rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.

5. Jeżeli w II etapie rozwiązania zdający popełni błędy i otrzyma nierówność $V(m) \leq 0$, to za podanie zbioru rozwiązań nierówności otrzymuje **1 punkt** tylko wtedy, gdy wielomian V jest stopnia co najmniej drugiego i ma co najmniej dwa różne pierwiastki rzeczywiste.

6. Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np. $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty** (co najwyżej 1 punkt za I etap i co najwyżej 2 punkty za II etap).

Przykładowe pełne rozwiązanie

I etap

Funkcja kwadratowa f ma dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $x^2 - 3x - m^2 + m + 3$ jest dodatni.

Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m^2 + m + 3) > 0$$

$$4m^2 - 4m - 3 > 0$$

$$(2m - 1)^2 - 4 > 0$$

$$(2m - 1 - 2) \cdot (2m - 1 + 2) > 0$$

$$4\left(m - \frac{3}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right) > 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

II etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $|x_1^2 - x_2^2| \le 12$, korzystając ze wzorów Viète'a.

$$|x_1^2 - x_2^2| \le 12$$

$$|x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \le 12$$

$$|x_1 - x_2| \cdot 3 \le 12$$

$$|x_1 - x_2| \le 4$$

Ponieważ obie strony nierówności $|x_1 - x_2| \le 4$ są nieujemne, więc przekształcamy tę nierówność równoważnie do postaci $(x_1 - x_2)^2 \le 16$. Stąd otrzymujemy

$$(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \le 16$$

$$3^2 - 4 \cdot (-m^2 + m + 3) \le 16$$

$$4m^2 - 4m - 19 \le 0$$

Obliczamy wyróżnik Δ_m trójmianu kwadratowego $4m^2 - 4m - 19$ i rozwiązujemy nierówność $4m^2 - 4m - 19 \le 0$:

$$\Delta_m = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-19) = 20 \cdot 16$$

$$m = \frac{4 - 8\sqrt{5}}{8} = \frac{1 - 2\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad m = \frac{4 + 8\sqrt{5}}{8} = \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}$$

$$m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}\right]$$

III etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, które jednocześnie spełniają warunki $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ oraz $m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}\right]$:

$m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}\right]$.

Zadanie 12. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens […]. VII.R5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych; VII.R7) stosuje twierdzenie sinusów.

Zasady oceniania (dla sposobu I)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie związków $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$ i $|ED| = \frac{1}{2} \cdot |CF|$ oraz uzasadnienie, że $|CF| = |AC|$.

3 pkt – zapisanie równości $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$ oraz uzasadnienie, że $|CF| = |AC|$.

2 pkt – uzasadnienie, że $|CF| = |AC|$

ALBO

– zdefiniowanie punktu F jako obrazu punktu C w symetrii osiowej względem prostej k **oraz** zapisanie równości $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$.

1 pkt – zdefiniowanie punktu F jako obrazu punktu C w symetrii osiowej względem prostej k

ALBO

– zapisanie równości $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie związku $\frac{2\sin\alpha}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$ i zastosowanie wzoru na sinus sumy kątów do $\sin(3\alpha)$ oraz $\sin(2\alpha+\beta)$, np.:

$2\sin\alpha\,[\sin(2\alpha)\cos\beta + \cos(2\alpha)\sin\beta] = \sin\beta\,[\sin(2\alpha)\cos\alpha + \cos(2\alpha)\sin\alpha]$.

3 pkt – wyeliminowanie długości odcinków z układu $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{2c}{\sin(180°-3\alpha)}$ i $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin[180°-(2\alpha+\beta)]}$, np. zapisanie związku $\frac{2\sin\alpha}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$.

2 pkt – zapisanie związków $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{2c}{\sin(180°-3\alpha)}$ i $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin[180°-(2\alpha+\beta)]}$.

1 pkt – zapisanie związku $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{2c}{\sin(180°-3\alpha)}$

ALBO

– zapisanie związku $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin[180°-(2\alpha+\beta)]}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie równań: $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$ oraz $a^2 - b^2 = 4cx$ oraz $a^2 = 2b(c+x)$.

3 pkt – spełnienie wszystkich trzech warunków określonych w zasadach oceniania za 1 punkt

ALBO

– zapisanie równań $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$ oraz $a^2 - b^2 = 4cx$,

ALBO

– zapisanie równań $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$ oraz $a^2 = 2b(c+x)$,

ALBO

– zapisanie równań $a^2 - b^2 = 4cx$ oraz $a^2 = 2b(c+x)$.

2 pkt – spełnienie dwóch warunków spośród 1)–3) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt

ALBO

– zapisanie związku $a^2 = 2b(c+x)$,

ALBO

– zapisanie związku $a^2 - b^2 = 4cx$.

1 pkt – spełnienie jednego z poniższych trzech warunków:

1) zapisanie równości $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$
2) zapisanie związku $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$
3) zapisanie równań $a^2 = h^2 + (c+x)^2$ oraz $b^2 = h^2 + (c-x)^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu IV)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie związków:

$(a^2 - b^2)\cdot\operatorname{tg}\beta = 4bc\cdot\sin(2\alpha)$ i $\frac{2c}{\sin(180°-3\alpha)} = \frac{b}{\sin\alpha}$, i $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$ oraz

zapisanie tożsamości $\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha + \cos(2\alpha)\cdot\sin\alpha$

(lub $\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha + (2\cos^2\alpha - 1)\cdot\sin\alpha$).

3 pkt – zapisanie związków $(a^2 - b^2)\cdot\operatorname{tg}\beta = 4bc\cdot\sin(2\alpha)$ i $\frac{2c}{\sin(180°-3\alpha)} = \frac{b}{\sin\alpha}$ oraz $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$.

2 pkt – zapisanie związku $(a^2 - b^2)\cdot\operatorname{tg}\beta = 4bc\cdot\sin(2\alpha)$.

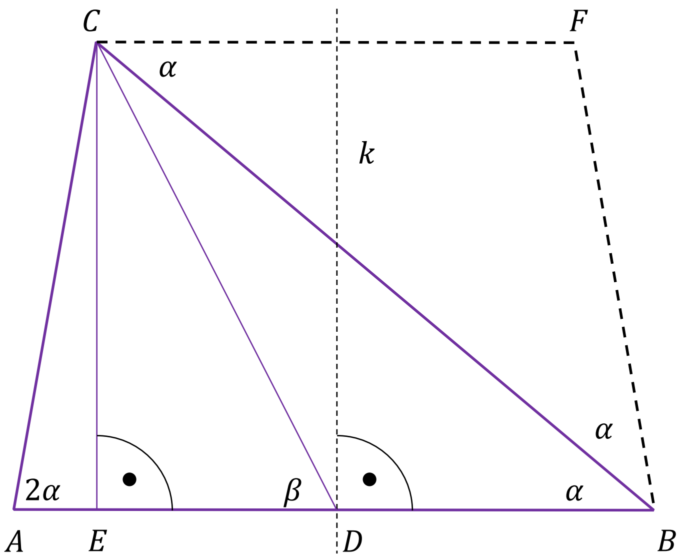
1 pkt – zapisanie związku $4cd\cdot\cos\beta = a^2 - b^2$

ALBO

– zapisanie związku $d\cdot\sin\beta = b\cdot\sin(2\alpha)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób I
Przyjmijmy następujące oznaczenia:
k – prosta prostopadła do AB i przechodząca przez punkt D,
F – obraz punktu C w symetrii osiowej względem prostej k,
E – spodek wysokości trapezu poprowadzonej z wierzchołka C na podstawę AB.
Czworokąt $ABFC$ jest trapezem równoramiennym o podstawach AB i CF oraz ramionach AC i BF. Zatem $|\measuredangle CBF| = |\measuredangle CAB| - |\measuredangle CBA| = 2\alpha - \alpha = \alpha$ oraz $|\measuredangle BCF| = |\measuredangle ABC| = \alpha$, więc trójkąt BCF jest równoramienny (zobacz rysunek). Stąd $|CF| = |FB| = |AC|$.



Ponieważ $\operatorname{tg}\beta = \frac{|CE|}{|ED|}$ oraz $\sin(2\alpha) = \frac{|CE|}{|AC|}$, więc

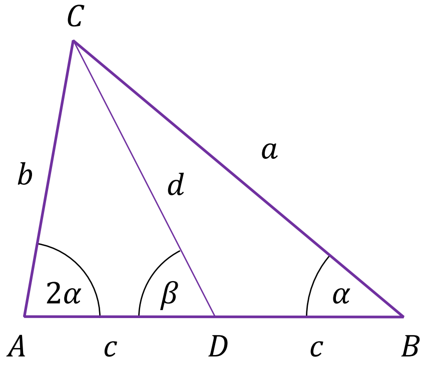
$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{\frac{|CE|}{|ED|}}{\frac{|CE|}{|AC|}} = \frac{|AC|}{|ED|}$$

Ponieważ trapez $ABFC$ jest równoramienny i D jest środkiem podstawy AB tego trapezu, więc $|ED| = \frac{1}{2} \cdot |CF|$.
Zatem

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|} = \frac{|AC|}{\frac{1}{2} \cdot |CF|} = \frac{|AC|}{\frac{1}{2} \cdot |AC|} = 2$$

Sposób II

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $|AD| = |BD| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|CD| = d$ (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkątów ABC i ADC twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} \quad \wedge \quad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin[180^\circ - (2\alpha + \beta)]}$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów redukcyjnych, dostajemy

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{2c}{\sin(3\alpha)} \quad \wedge \quad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin(2\alpha + \beta)}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{2\sin\alpha}{\sin(3\alpha)} \quad \wedge \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha + \beta)}$$

$$\frac{2\sin\alpha}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha + \beta)}$$

$$2\sin\alpha \cdot \sin(2\alpha + \beta) = \sin\beta \cdot \sin(3\alpha)$$

Stosujemy wzór na sinus sumy kątów, otrzymując kolejno:

$$2\sin\alpha\sin(2\alpha)\cos\beta + 2\sin\alpha\cos(2\alpha)\sin\beta = \sin\beta\sin(2\alpha)\cos\alpha + \sin\beta\cos(2\alpha)\sin\alpha$$

$$2\sin\alpha\sin(2\alpha)\cos\beta = \sin\beta\sin(2\alpha)\cos\alpha - \sin\beta\cos(2\alpha)\sin\alpha$$

$$2\sin\alpha\sin(2\alpha)\cos\beta = \sin\beta\,[\sin(2\alpha)\cos\alpha - \cos(2\alpha)\sin\alpha]$$

Stosujemy wzór na sinus różnicy kątów i dostajemy

$$2\sin\alpha\sin(2\alpha)\cos\beta = \sin\beta\sin\alpha$$

Stąd

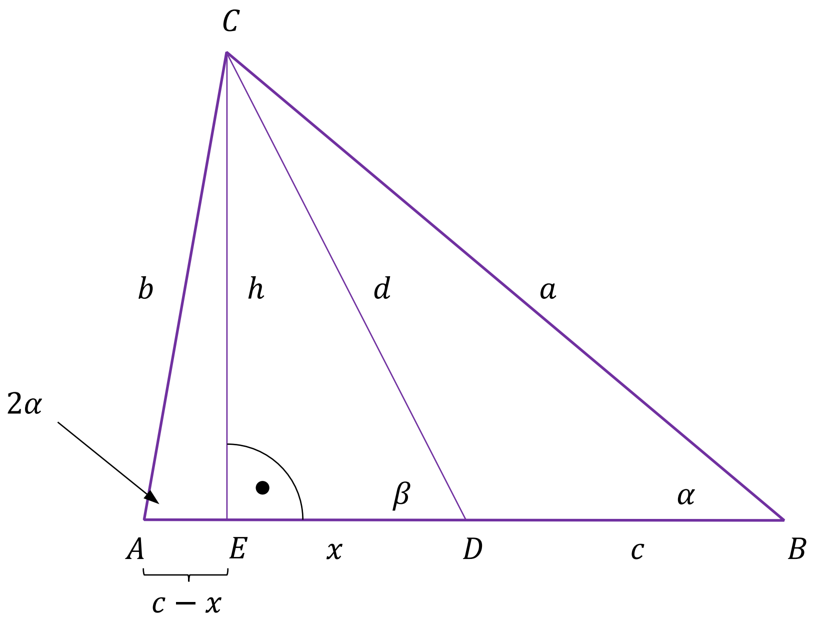
$$\sin\alpha = 0 \quad \vee \quad 2\sin(2\alpha)\cos\beta = \sin\beta$$

Trójkąt ABC jest ostrokątny, więc $\sin\alpha = 0$ jest wykluczone przez warunki zadania.
Zatem $2\sin(2\alpha)\cos\beta = \sin\beta$, czyli

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = 2$$

Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $|AD| = |BD| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|CD| = d$,
E – spodek wysokości trójkąta ADC poprowadzonej z wierzchołka C na bok AD,
h – wysokość trójkąta ADC poprowadzona z wierzchołka C,
x – długość odcinka DE (zobacz rysunek).



Przy przyjętych oznaczeniach mamy

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{\frac{h}{x}}{\frac{h}{b}} = \frac{b}{x}$$

Po zastosowaniu do trójkąta ABC twierdzenia sinusów oraz wzoru na sinus podwojonego kąta otrzymujemy:

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$$

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{2b}$$

Z definicji cosinusa zastosowanej do trójkąta prostokątnego EBC mamy $\cos\alpha = \frac{c+x}{a}$, więc po uwzględnieniu związku $\cos\alpha = \frac{a}{2b}$ otrzymujemy

$$\frac{a}{2b} = \frac{c+x}{a}$$

$$a^2 = 2b(c+x)$$

Po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa do trójkątów AEC i EBC otrzymujemy

$$b^2 = h^2 + (c - x)^2 \quad \wedge \quad a^2 = h^2 + (c + x)^2$$

Stąd

$$a^2 - b^2 = h^2 + (c + x)^2 - h^2 - (c - x)^2$$

czyli

$$a^2 - b^2 = 4cx$$

Stąd i z zależności $a^2 = 2b(c + x)$ otrzymujemy kolejno

$$a^2 = 2b(c + x) \quad \wedge \quad a^2 - b^2 = 4cx$$

$$2b(c + x) - b^2 = 4cx$$

$$2bc + 2bx - b^2 = 4cx$$

$$2bc - b^2 = 4cx - 2bx$$

$$b(2c - b) = 2x(2c - b)$$

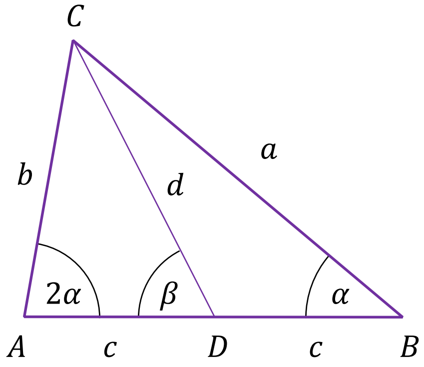
$$b = 2x \quad \vee \quad b = 2c$$

Gdy $b = 2c$, to trójkąt ABC jest równoramienny i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA|$, czyli $\alpha = 180 - 3\alpha$, tj. $\alpha = 45°$. Wtedy $|\sphericalangle BAC| = 2\alpha = 90°$ i trójkąt ABC nie jest ostrokątny.
Zatem $b = 2x$ i ostatecznie

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

Sposób IV

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $|AD| = |BD| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|CD| = d$ (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkątów BCD i ADC twierdzenie cosinusów i otrzymujemy:

$$a^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos(180° - \beta)$$

$$b^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\beta$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów redukcyjnych, dostajemy

$$a^2 - b^2 = 4cd \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 - b^2}{4cd}$$

Stosujemy do trójkąta ADC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{d}{\sin(2\alpha)}$$

$$\sin\beta = b \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{d}$$

Zatem

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{d}}{\frac{a^2 - b^2}{4cd}} = \frac{4bc \cdot \sin(2\alpha)}{a^2 - b^2}$$

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{b}{\sin\alpha} \quad \wedge \quad \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów redukcyjnych oraz wzoru na sinus podwojonego kąta, otrzymujemy

$$\sin(3\alpha) = 2c \cdot \frac{\sin\alpha}{b} \quad \wedge \quad \sin(2\alpha) = a \cdot \frac{\sin\alpha}{b}$$

$$\sin(3\alpha) = 2c \cdot \frac{\sin\alpha}{b} \quad \wedge \quad \cos\alpha = \frac{a}{2b}$$

Stąd i ze wzoru na sinus sumy kątów oraz cosinus podwojonego kąta uzyskujemy kolejno:

$$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha) \cdot \cos\alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin\alpha$$

$$2c \cdot \frac{\sin\alpha}{b} = a \cdot \frac{\sin\alpha}{b} \cdot \frac{a}{2b} + \left[2 \cdot \left(\frac{a}{2b}\right)^2 - 1\right] \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{2c}{b} = \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^2}{2b^2} - 1$$

$$2bc = a^2 - b^2$$

Stąd i z zależności $\operatorname{tg}\beta = \frac{4bc \cdot \sin(2\alpha)}{a^2 - b^2}$ otrzymujemy

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{4bc}{a^2 - b^2} = \frac{4bc}{2bc} = 2$$

Zadanie 13.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą […] wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktów B i D oraz zapisanie drugiej współrzędnej punktu C w zależności od x: $B = (7, 0)$ i $D = \left(0, \frac{21}{2}\right)$ oraz $C = \left(x, \frac{12x-84}{x-8}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy współrzędne punktu B:

$$\frac{12x - 84}{x - 8} = 0$$

$$12x - 84 = 0$$

$$x = 7 \in (-\infty, 8)$$

Zatem $B = (7, 0)$.

Obliczamy współrzędne punktu D: $f(0) = \frac{12\cdot 0-84}{0-8} = \frac{21}{2}$

Zatem $D = \left(0, \frac{21}{2}\right)$.

Ponieważ C leży na wykresie funkcji f i ma obie współrzędne dodatnie, więc $C = \left(x, \frac{12x-84}{x-8}\right)$, gdzie $0 < x < 7$.

Pole P czworokąta $OBCD$ jest sumą pól trójkątów OCD i OBC, więc

$$P = P_{OCD} + P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{12x - 84}{x - 8} = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 8x + 8x - 56}{x - 8} = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

gdzie $x \in (0, 7)$.

Zadanie 13.2. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja P przyjmuje wartość największą dla $x = 8 - 2\sqrt{2}$ i obliczenie współrzędnych punktu C, dla których pole czworokąta $OBCD$ jest największe: $C = \left(8 - 2\sqrt{2}, 12 - 3\sqrt{2}\right)$.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja P przyjmuje wartość największą dla $x = 8 - 2\sqrt{2}$.

2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji P: $x = 8 - 2\sqrt{2}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji P, np. $P'(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{2x(x-8) - \left(x^2 - 56\right) \cdot 1}{(x-8)^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości x, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:

– opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji P

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Jeżeli zdający nie przedstawi poprawnego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji P:

$$P'(x)=\frac{21}{4}\cdot\frac{2x(x-8)-(x^2-56)\cdot 1}{(x-8)^2}=\frac{21}{4}\cdot\frac{x^2-16x+56}{(x-8)^2}$$

dla $x\in(0,7)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji P:

$$P'(x)=0$$

$$\frac{21}{4}\cdot\frac{x^2-16x+56}{(x-8)^2}=0$$

$$x^2-16x+56=0$$

$$x=\frac{16-\sqrt{32}}{2}=8-2\sqrt{2}\in(0,7)\quad\vee\quad x=\frac{16+\sqrt{32}}{2}\notin(0,7)$$

Badamy znak pochodnej:

$$P'(x)>0$$

$$\frac{21}{4}\cdot\frac{x^2-16x+56}{(x-8)^2}>0$$

$$x^2-16x+56>0$$

$$x\in\left(0,8-2\sqrt{2}\right)$$

Zatem funkcja P jest rosnąca w przedziale $\left(0,8-2\sqrt{2}\,\right]$ i funkcja P jest malejąca w przedziale $\left[8-2\sqrt{2},7\right)$.

Stąd dla $x=8-2\sqrt{2}$ funkcja P osiąga wartość największą.

Gdy pierwsza współrzędna punktu C jest równa $x_C=8-2\sqrt{2}$, to wtedy druga współrzędna y_C tego punktu jest równa:

$$y_C=\frac{12\cdot(8-2\sqrt{2})-84}{8-2\sqrt{2}-8}=\frac{12-24\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}=\frac{12}{-2\sqrt{2}}+12=12-3\sqrt{2}$$

Pole czworokąta $OBCD$ jest największe, gdy $C=\left(8-2\sqrt{2},12-3\sqrt{2}\right)$.