CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-400**.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

TEST DIAGNOSTYCZNY

Symbol arkusza
MMAP-P0-**400**-2412

DATA: **6 grudnia 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **do 270 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią.

Zdający **nie przenosi** odpowiedzi na kartę odpowiedzi.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronach 2 oraz 3.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 57 stron (zadania 1–30). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Nie wypełniaj karty odpowiedzi dołączonej do arkusza.
3. W zadaniach zamkniętych zaznacz swój wybór znakiem ✕, np.:

   A.

   B.

   C.

   D.

   Jeśli się pomylisz, otocz znak ✕ kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

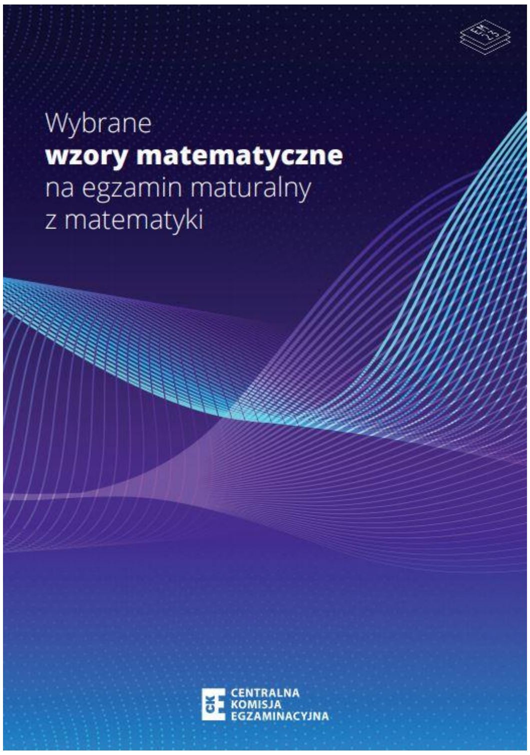
   A.

   B.

   C.

   D.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.

5. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z „Wybranych wzorów matematycznych”, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadanie 1. (0–1)

Liczby x_1 i x_2 są różnymi rozwiązaniami równania
$|x + 4| = 7$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma $x_1 + x_2$ jest równa

A. (-14)
B. (-8)
C. 3
D. 8

BRUDNOPIS

Zadanie 2. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\left(\sqrt[5]{5} \cdot \frac{1}{5}\right)^{-5}$ jest równa

A. 5^{4}

B. 5^{-4}

C. $5^{0,25}$

D. $5^{-0,25}$

BRUDNOPIS

Zadanie 3. (0–2)

Wykaż, że liczba $2^{100} + 4^{49} + 16^{24}$ jest podzielna przez 21.

Zadanie 4. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y wartość wyrażenia $\log_7 x + 6\log_7 y$ jest równa wartości wyrażenia

A. $\log_7\left(\frac{x}{y^6}\right)$

B. $\log_7(xy)^6$

C. $\log_7(6xy)$

D. $\log_7(xy^6)$

BRUDNOPIS

Zadanie 5. (0–1)

Pani Aniela wpłaciła do banku kwotę $60\,000$ zł na lokatę dwuletnią. Po każdym rocznym okresie oszczędzania bank doliczał odsetki w wysokości $p\%$ w skali roku od kwoty bieżącego kapitału znajdującego się na lokacie – zgodnie z procentem składanym. Na koniec okresu oszczędzania kwota na tej lokacie była równa $67\,925{,}76$ zł wraz z odsetkami (bez uwzględniania podatków).

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Oprocentowanie lokaty w skali roku było równe

A. 6%

B. $6{,}4\%$

C. $6{,}5\%$

D. 7%

BRUDNOPIS

Zadanie 6. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od (-1), 0 oraz 1 wartość wyrażenia $\frac{x}{x^2-1} : \frac{3x^2}{x+1}$ jest równa wartości wyrażenia

A. $\frac{x}{x-1}$

B. $\frac{1}{3x^2-3x}$

C. $-3x$

D. $-\frac{1}{3x}$

BRUDNOPIS

Zadanie 7. (0–1)

Para liczb $x = -1$ i $y = 6$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} ax + 3y = 20 \\ x + by = 5 \end{cases}$$

gdzie a oraz b są liczbami rzeczywistymi.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $a \cdot b$ jest równa

A. (-2)
B. $(-0{,}5)$
C. $0{,}5$
D. 2

BRUDNOPIS

Zadanie 8. (0–3)

Rozwiąż równanie

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2}$$

Zapisz konieczne założenie i obliczenia.

Zadanie 9. (0–2)

Rozwiąż nierówność

$$x(x-6) \leq 7$$

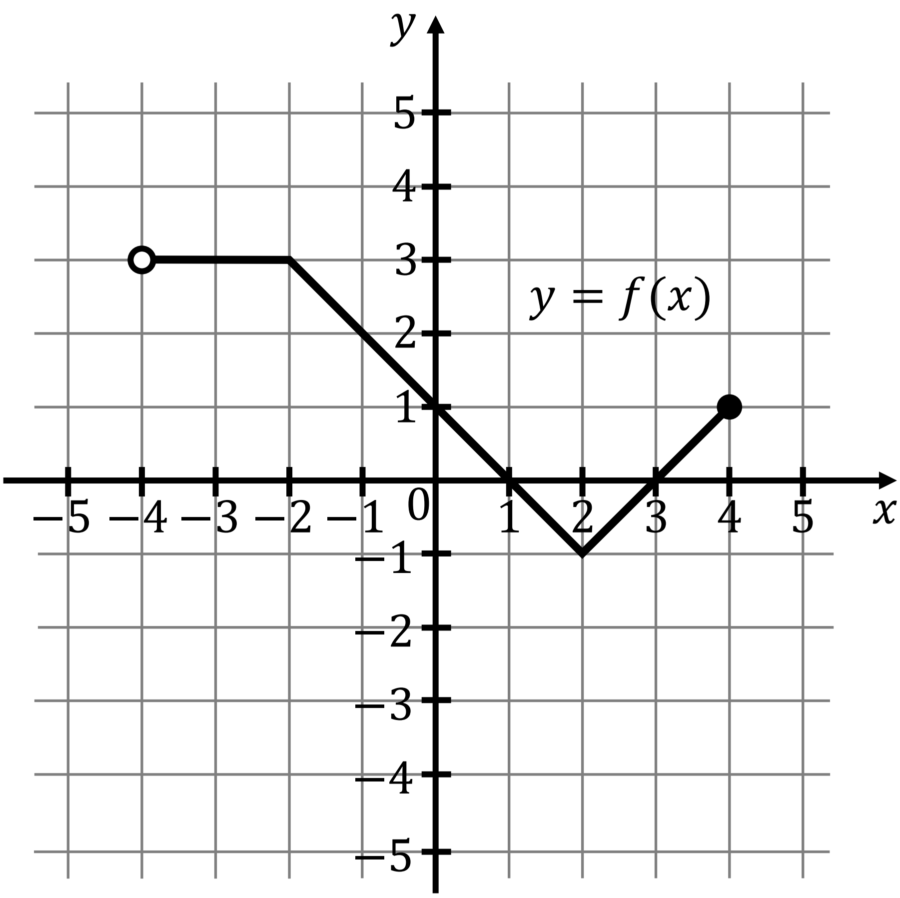
Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–4)

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-4, -2] \\ -x + 1 & \text{dla } x \in (-2, 2] \\ x - 3 & \text{dla } x \in (2, 4] \end{cases}$$

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

1. Dziedziną funkcji f jest przedział …………… .

2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział …………… .

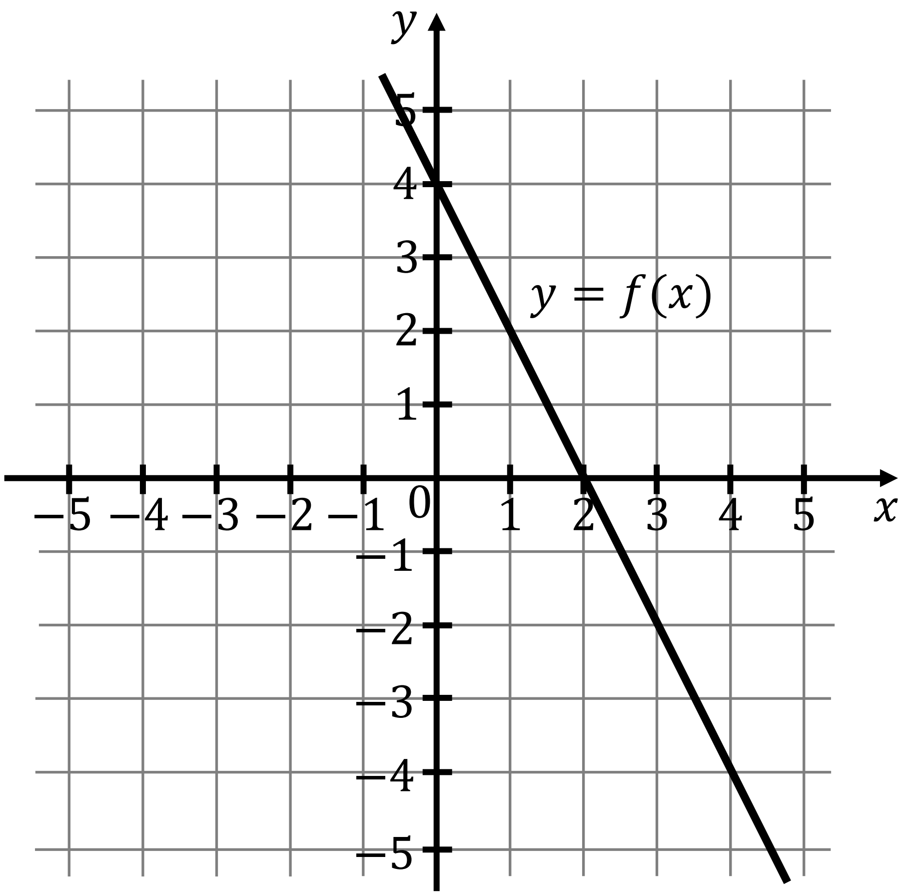
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne, jest przedział …………… .

4. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje największą wartość, jest przedział …………… .

BRUDNOPIS

Zadanie 11. (0–1)

Miejscem zerowym funkcji liniowej f jest liczba 2, a punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią Oy kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y) ma współrzędne $(0, 4)$ (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Współczynnik kierunkowy prostej, która jest wykresem funkcji f, jest równy (-2).	P	F
Pole trójkąta ograniczonego osiami kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y) oraz wykresem funkcji f jest równe 8.	P	F

BRUDNOPIS

Zadanie 12.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $(3, 0)$. Ta parabola przechodzi przez punkt o współrzędnych $(0, -9)$.

Zadanie 12.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f jest malejąca w przedziale

A. $(-\infty, 0]$
B. $(-\infty, 3]$
C. $[0, +\infty)$
D. $[3, +\infty)$

BRUDNOPIS

Zadanie 12.2. (0–2)

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie właściwe odpowiedzi spośród oznaczonych literami A–F.

Funkcja f jest określona wzorem

A. $f(x) = -x^2 - 9$

B. $f(x) = -(x-3)^2$

C. $f(x) = -(x+3)^2$

D. $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

E. $f(x) = -x^2 - 6x + 9$

F. $f(x) = -x^2 - 6x - 9$

BRUDNOPIS

Zadanie 12.3. (0–1)

Funkcja kwadratowa g jest określona za pomocą funkcji f następująco: $g(x) = f(x) - 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Funkcja g ma jedno miejsce zerowe.	P	F
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) osią symetrii wykresu funkcji g jest prosta o równaniu $x = 3$.	P	F

BRUDNOPIS

Zadanie 13. (0–1)

Funkcja logarytmiczna f jest określona wzorem
$f(x) = \log_6 x$ dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wartość funkcji f dla argumentu 36 jest równa 6.	P	F
Funkcja f jest rosnąca.	P	F

BRUDNOPIS

Zadanie 14. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3 \cdot (-1)^n + 10$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) jest geometryczny.	P	F
Suma ośmiu początkowych kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 80.	P	F

BRUDNOPIS

Zadanie 15. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trzywyrazowy ciąg $(5m,\ 4+2m,\ m)$ jest arytmetyczny, gdy liczba m jest równa

A. (-4)

B. (-1)

C. 1

D. 4

BRUDNOPIS

Zadanie 16. (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_2 = \frac{1}{6}$ oraz $a_3 = \frac{1}{9}$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Piąty wyraz ciągu (a_n) jest równy

A. $\frac{1}{15}$

B. $\frac{2}{27}$

C. $\frac{4}{81}$

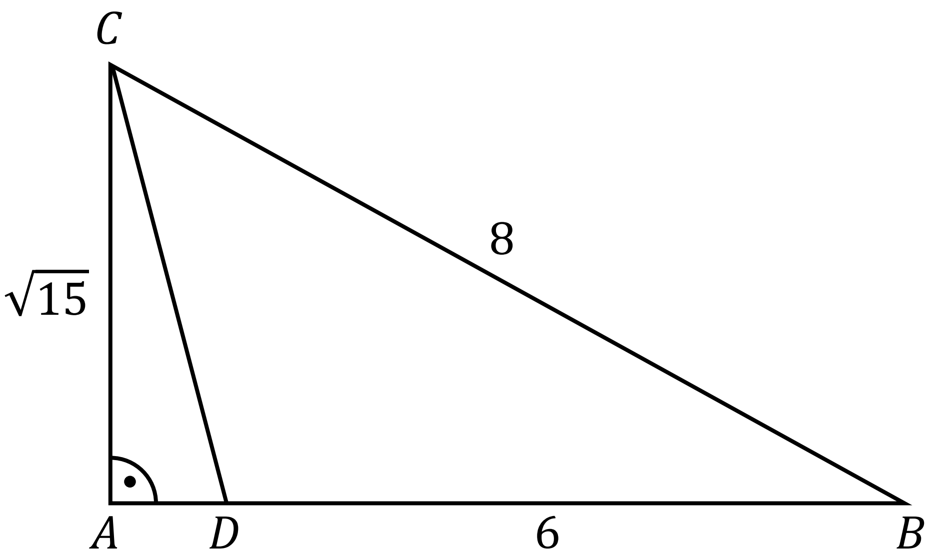
D. $\frac{8}{243}$

BRUDNOPIS

Kolejne zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

Zadanie 17.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|AC| = \sqrt{15}$ i $|BC| = 8$. Na przyprostokątnej AB leży taki punkt D, że $|BD| = 6$ (zobacz rysunek).



Zadanie 17.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Sinus kąta ostrego ABC jest równy

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{7}{8}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{15}}{8}$

BRUDNOPIS

Zadanie 17.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta ostrego ADC jest równy

A. $\sqrt{15}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{7}{8}$

D. $\frac{\sqrt{15}}{8}$

BRUDNOPIS

Zadanie 18. (0–1)

Kąt o mierze α jest <u>rozwarty</u> oraz $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus kąta o mierze α jest równy

A. $\left(-\frac{\sqrt{13}}{4}\right)$

B. $\left(-\frac{1}{2}\right)$

C. $\frac{1}{2}$

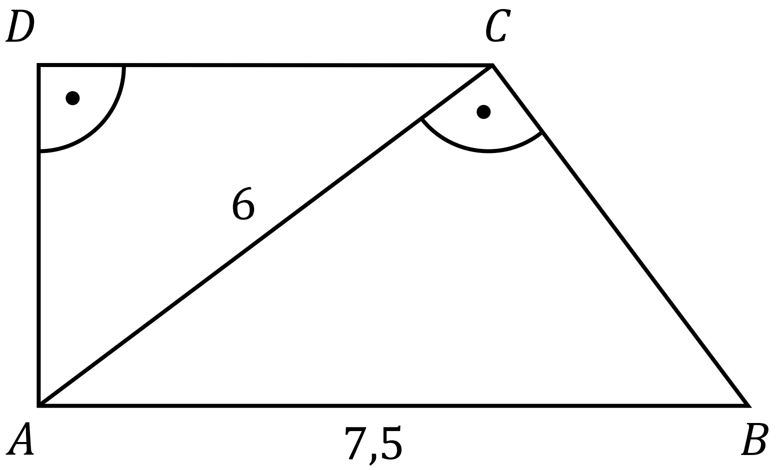
D. $\frac{\sqrt{13}}{4}$

BRUDNOPIS

Kolejne zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

Zadanie 19. (0–4)

W trapezie prostokątnym $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość $7{,}5$. Krótsza przekątna AC ma długość równą 6 i dzieli trapez na dwa trójkąty prostokątne (zobacz rysunek).

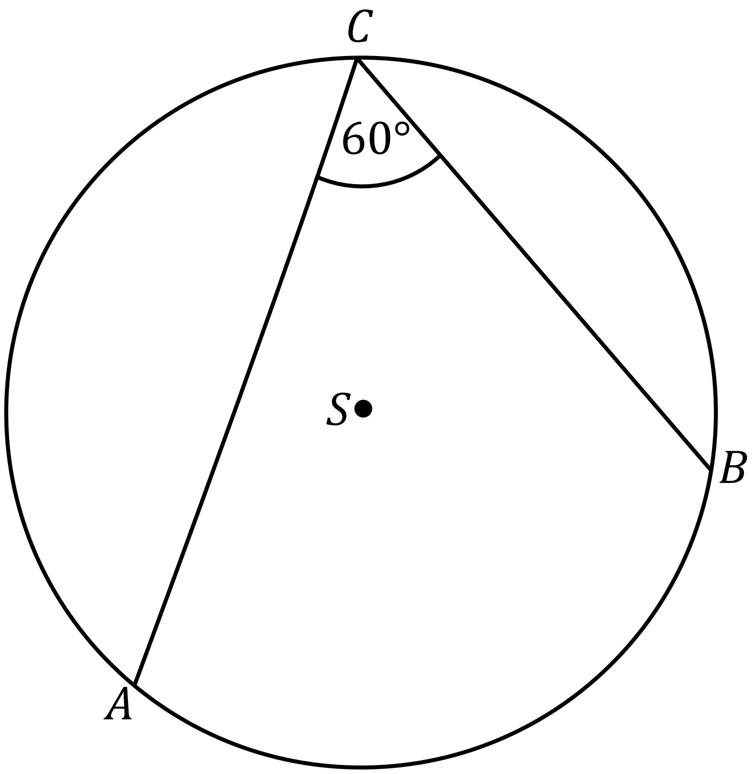


Oblicz pole trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0–1)

Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu 6.

Miara kąta wpisanego ACB jest równa 60° (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość łuku AB, na którym oparty jest kąt wpisany ACB, jest równa

A. 2π

B. 4π

C. 6π

D. 12π

BRUDNOPIS

Zadanie 21. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (-2, -1)$ oraz $C = (3, 4)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość boku kwadratu $ABCD$ jest równa

A. 5
B. 10
C. $5\sqrt{2}$
D. $\sqrt{10}$

BRUDNOPIS

Zadanie 22. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dana jest prosta k o równaniu $y = -7x + 3$. Prosta l jest równoległa do prostej k i przecina oś Oy w punkcie $(0, 6)$.
Punkt o współrzędnych $(1, p)$ należy do prostej l.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba p jest równa

A. (-4)
B. (-1)
C. $\frac{5}{7}$
D. 7

BRUDNOPIS

Zadanie 23. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są cztery okręgi: o_1, o_2, o_3, o_4, o równaniach:

o_1: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

o_2: $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$

o_3: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$

o_4: $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 16$

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Okręgiem, który nie ma żadnego punktu wspólnego z osiami układu współrzędnych (x, y), jest

A. o_1

B. o_2

C. o_3

D. o_4

BRUDNOPIS

Zadanie 24. (0–1)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat o boku długości 4. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod takim kątem α, że $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość tego ostrosłupa jest równa

A. 3

B. 6

C. $6\sqrt{2}$

D. 12

BRUDNOPIS

Zadanie 25. (0–1)
Długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka prostopadłościanu są trzema kolejnymi parzystymi liczbami naturalnymi. Najdłuższa krawędź tego prostopadłościanu ma długość p.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego prostopadłościanu jest równa

A. $p^3 - 3p^2 + 2p$
B. $p^3 + 3p^2 + 2p$
C. $p^3 - 6p^2 - 8p$
D. $p^3 - 6p^2 + 8p$

BRUDNOPIS

Kolejne zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

Zadanie 26. (0–2)

Objętość stożka o wysokości 2 jest równa 8π.

Oblicz miarę kąta rozwarcia tego stożka. Zapisz obliczenia.

Zadanie 27. (0–1)
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych nieparzystych, w których zapisie dziesiętnym występują wyłącznie cyfry 0, 1, 2, 3 (np. $12\,303$, $11\,111$), jest

A. 32
B. 384
C. 512
D. 576

BRUDNOPIS

Kolejne zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

Zadanie 28. (0–2)

Dane są dwa zbiory:

$C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ oraz $D = \{7,\ 8,\ 9,\ 10\}$.

Losujemy jedną liczbę ze zbioru C, a następnie losujemy jedną liczbę ze zbioru D.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosujemy liczby, których iloczyn będzie podzielny przez 4. Zapisz obliczenia.

Zadanie 29. (0–2)

Do szkolnego koła czytelniczego należy 50 uczniów. Opiekun koła zebrał dane dotyczące liczby książek przeczytanych przez tych uczniów w listopadzie 2024 roku. W poniższej tabeli przedstawiono wyniki zebrane przez opiekuna.

Liczba przeczytanych książek	4	5	6	7	8
Liczba uczniów, którzy przeczytali daną liczbę książek	5	8	12	13	12

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

1. Średnia arytmetyczna liczby przeczytanych książek w tej grupie uczniów jest równa …………… .

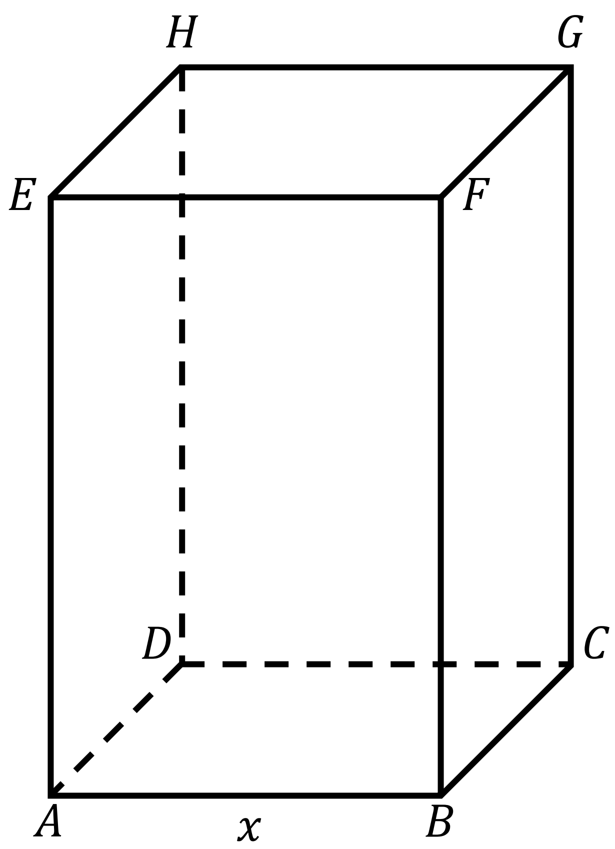
2. Mediana liczby przeczytanych książek w tej grupie uczniów jest równa …………… .

BRUDNOPIS

Zadanie 30. (0–4)

Rozważamy wszystkie prostopadłościany $ABCDEFGH$, w których krawędź AE jest 3 razy dłuższa od krawędzi AB, a suma długości wszystkich dwunastu krawędzi prostopadłościanu jest równa 48 (zobacz rysunek).

Niech $P(x)$ oznacza funkcję pola powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu w zależności od długości x krawędzi AB.



Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji P. Oblicz długość x krawędzi AB tego z rozważanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest największe. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023