CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA



**WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY**

KOD

PESEL

*Miejsce na naklejkę.*
*Sprawdź, czy kod na naklejce to* **M-Q00**.

# Egzamin maturalny — *Formuła 2023*

# MATEMATYKA

## Poziom podstawowy

**TEST DIAGNOSTYCZNY**

*Symbol arkusza*
MMAP-P0-Q00-2312

DATA: **7 grudnia 2023 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **do 210 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **46**

**WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY**

Uprawnienia zdającego do:
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

**Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym**

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronach 2 oraz 3.

## Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 74 strony (zadania 1–30). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Nie wypełniaj karty odpowiedzi dołączonej do arkusza.
3. W zadaniach zamkniętych zaznacz swój wybór znakiem ✕, np.:

   **A.**

   **B.**

   **C.**

   **D.**

   Jeśli się pomylisz, otocz znak ✕ kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

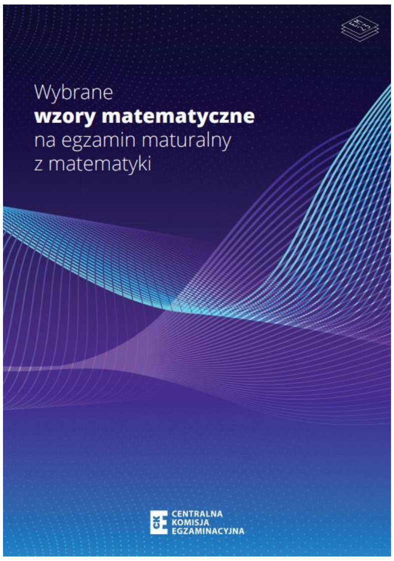
   **A.**

   **B.**

   **C.**

   **D.**
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.

5. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



## Zadanie 1. (1 pkt)

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Liczba $\left(3^{-2,4} \cdot 3^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$ jest równa

**A.** $\sqrt{3}$

**B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**C.** $\frac{1}{3}$

**D.** $0{,}3$

BRUDNOPIS

## Zadanie 2. (1 pkt)

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Liczba $\log_2 96 - \log_2 3$ jest równa

**A.** $\log_2 93$

**B.** $\log_2 30$

**C.** $4$

**D.** $5$

BRUDNOPIS

## Zadanie 3. (1 pkt)

Pan Grzegorz wpłacił do banku pewną kwotę na lokatę dwuletnią.
Po każdym rocznym okresie oszczędzania bank doliczał odsetki w wysokości $5\%$ od kwoty bieżącego kapitału znajdującego się na lokacie.
Po dwóch latach oszczędzania pan Grzegorz odebrał z tego banku wraz z odsetkami kwotę $4851$ zł (bez uwzględnienia podatków).

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Kwota wpłacona przez pana Grzegorza na tę lokatę była równa

**A.** $4300$ zł

**B.** $4400$ zł

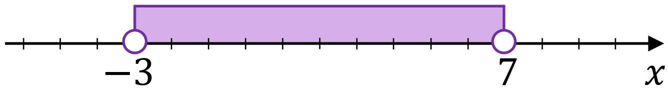
**C.** $4500$ zł

**D.** $4600$ zł

BRUDNOPIS

**Zadanie 4. (1 pkt)**

Na osi liczbowej zaznaczono przedział.




**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Zbiór zaznaczony na osi jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

**A.** $|x-2|<5$

**B.** $|x-2|>5$

**C.** $|x-5|<2$

**D.** $|x-5|>2$

BRUDNOPIS

**Zadanie 5. (2 pkt)**

**Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej $n$ liczba $3n^2 + 4n + 1$ jest podzielna przez $4$.**

## Zadanie 6. (1 pkt)

Dany jest układ równań $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb

**A.** $x = 1$ i $y = 2$

**B.** $x = 0$ i $y = -3$

**C.** $x = -2$ i $y = 1$

**D.** $x = -1$ i $y = -1$

BRUDNOPIS

## Zadanie 7. (1 pkt)

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Dla każdej liczby rzeczywistej $x$ różnej od $(-3)$ i $(-2)$ wartość wyrażenia

$$\frac{x+3}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2+2x}{2x+6}$$

jest równa wartości wyrażenia

**A.** $\frac{x}{2}$

**B.** $\frac{x}{4}$

**C.** $\frac{x}{2x+4}$

**D.** $\frac{x^3+3x^2}{6x^2+24x+24}$

BRUDNOPIS

## Zadanie 8. (1 pkt)

Dany jest wielomian $W(x) = -3x^3 - x^2 + kx + 1$, gdzie $k$ jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiadomo, że wielomian $W$ można zapisać w postaci $W(x) = (x + 1) \cdot Q(x)$ dla pewnego wielomianu $Q$.

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Liczba $k$ jest równa

**A.** $29$

**B.** $(-3)$

**C.** $0$

**D.** $3$

BRUDNOPIS

## Zadanie 9. (3 pkt)

**Rozwiąż równanie**

$$2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$$

**Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 10. (1 pkt)

Funkcja liniowa $f$ jest określona wzorem $f(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$.

**Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.**

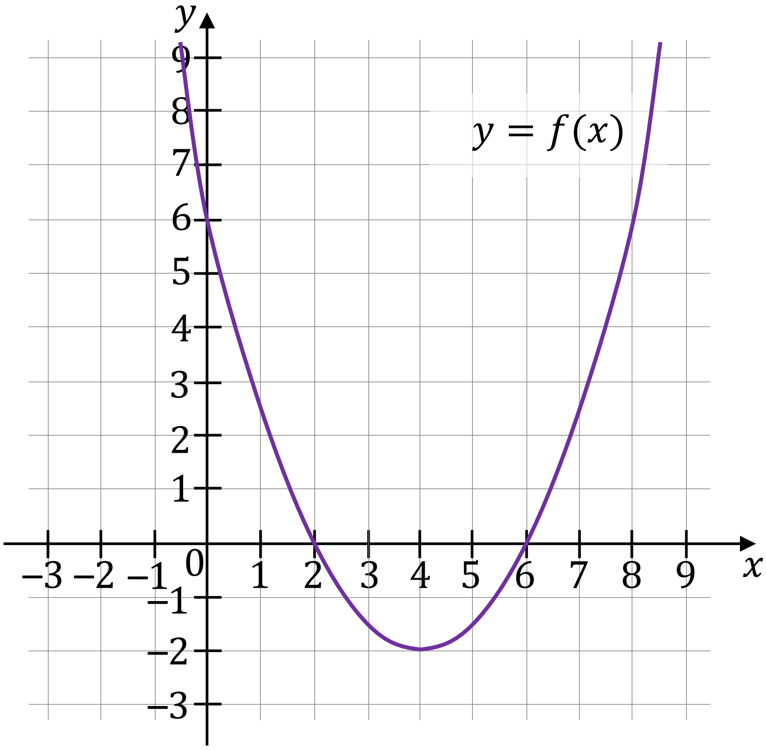
| | | |
|---|---|---|
| Miejscem zerowym funkcji $f$ jest liczba $4$. | **P** | **F** |
| Punkt przecięcia wykresu funkcji $f$ z osią $Oy$ ma współrzędne $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$. | **P** | **F** |

BRUDNOPIS

## Zadanie 11.

W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej $f$ (zobacz rysunek).

Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji $f$, oraz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych mają współrzędne całkowite.




## Zadanie 11.1. (1 pkt)

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Zbiorem wartości funkcji $f$ jest przedział

**A.** $(-\infty, -2]$

**B.** $(-\infty, 4]$

**C.** $[-2, +\infty)$

**D.** $[4, +\infty)$

BRUDNOPIS

## Zadanie 11.2. (1 pkt)

**Zapisz poniżej w postaci przedziału zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja $f$ przyjmuje wartości ujemne.**

..........................................................................................................

BRUDNOPIS

**Zadanie 11.3 znajduje się na następnej stronie.**

## Zadanie 11.3. (2 pkt)

**Dokończ zdanie. Zaznacz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.**

Wzór funkcji $f$ można przedstawić w postaci

**A.** $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-6)$

**B.** $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$

**C.** $f(x) = 2(x-2)(x-6)$

**D.** $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 2$

**E.** $f(x) = 2(x+2)(x+6)$

**F.** $f(x) = 2(x+4)^2 - 2$

BRUDNOPIS

**Zadanie 11.4 znajduje się na następnej stronie.**

## Zadanie 11.4 (1 pkt)

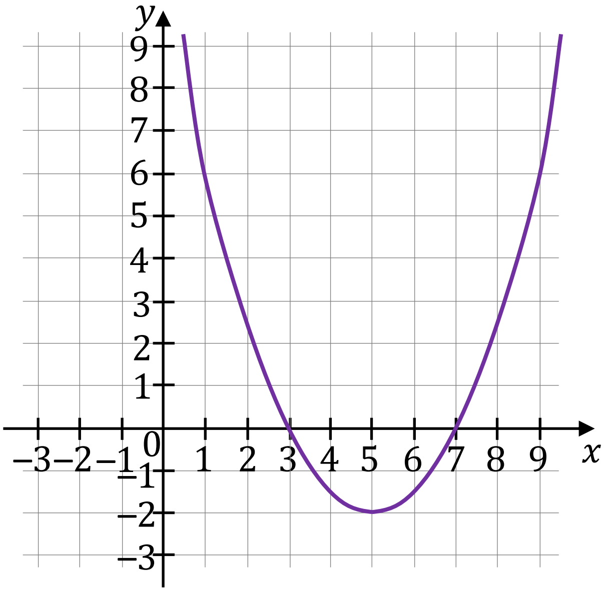
Funkcja kwadratowa $g$ jest określona za pomocą funkcji $f$ (zobacz rysunek na stronie 24) następująco: $g(x) = f(x+1)$.

Na jednym z rysunków A–D przedstawiono, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$, fragment wykresu funkcji $y = g(x)$.

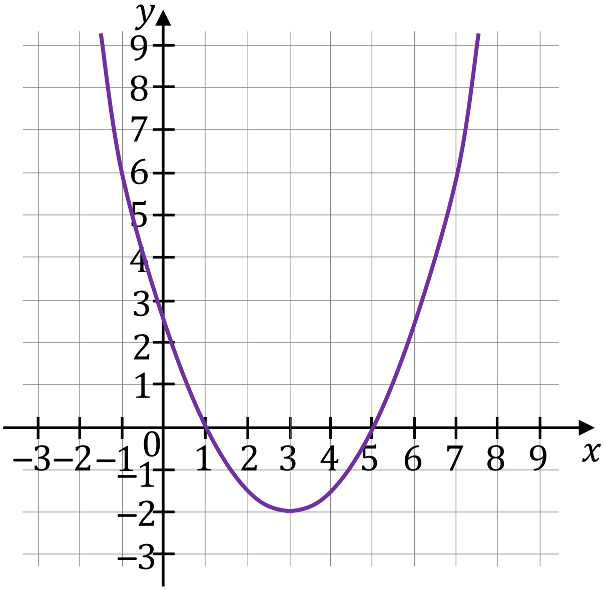
**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Fragment wykresu funkcji $y = g(x)$ przedstawiono na rysunku

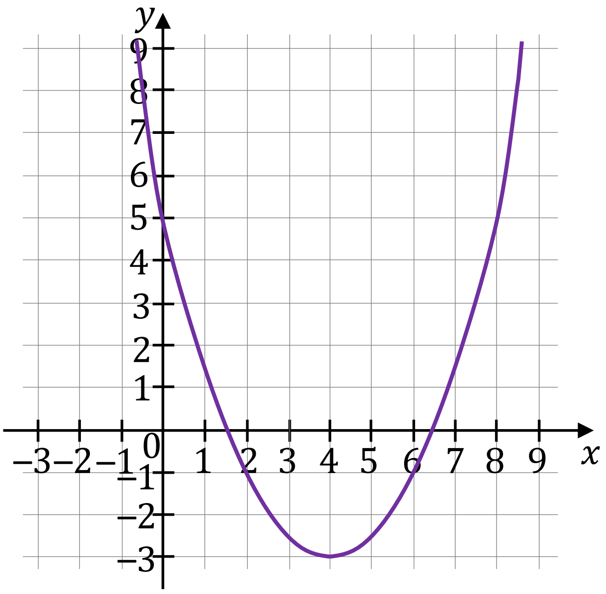
**A.**



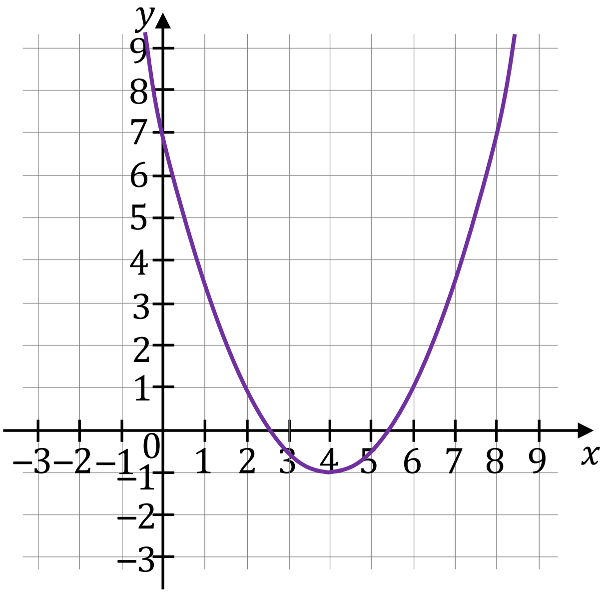

**B.**



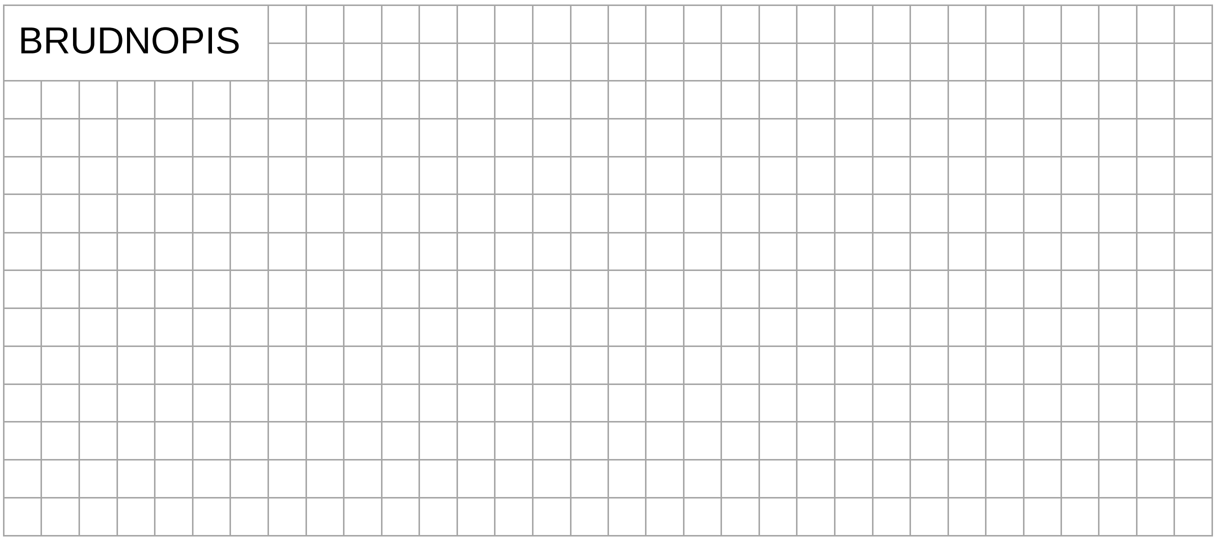
**C.**




**D.**




BRUDNOPIS



## Zadanie 12. (1 pkt)

Proces stygnięcia naparu z ziół w otoczeniu o stałej temperaturze $22\ ^\circ\mathrm{C}$ opisuje funkcja wykładnicza $T(x) = 78 \cdot 2^{-0{,}05x} + 22$, gdzie $T(x)$ to temperatura naparu wyrażona w stopniach Celsjusza ($^\circ\mathrm{C}$) po $x$ minutach liczonych od momentu $x = 0$, w którym zioła zalano wrzątkiem.

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Temperatura naparu po $20$ minutach od momentu zalania ziół wrzątkiem jest równa

**A.** $22\ ^\circ\mathrm{C}$

**B.** $39\ ^\circ\mathrm{C}$

**C.** $78\ ^\circ\mathrm{C}$

**D.** $61\ ^\circ\mathrm{C}$

BRUDNOPIS

## Zadanie 13. (1 pkt)

Ciąg arytmetyczny $(a_n)$ jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. W tym ciągu $a_2 = 4$ oraz $a_3 = 9$.

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Szósty wyraz ciągu $(a_n)$ jest równy

**A.** $24$

**B.** $29$

**C.** $36$

**D.** $69$

BRUDNOPIS

## Zadanie 14. (1 pkt)

Ciąg $(a_n)$ jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Suma $n$ początkowych wyrazów tego ciągu jest określona wzorem

$S_n = 4 \cdot (2^n - 1)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

**Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.**

| | | |
|---|---|---|
| Pierwszy wyraz ciągu $(a_n)$ jest równy $4$. | **P** | **F** |
| Drugi wyraz ciągu $(a_n)$ jest równy $12$. | **P** | **F** |

BRUDNOPIS

## Zadanie 15. (1 pkt)

Trzywyrazowy ciąg $(1 - 2a, 12, 48)$ jest geometryczny.

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Liczba $a$ jest równa

**A.** $(-1)$

**B.** $3$

**C.** $4$

**D.** $12{,}5$

BRUDNOPIS

## Zadanie 16. (2 pkt)

Dane są dwa kąty o miarach $\alpha$ oraz $\beta$, spełniające warunki:

$\alpha \in (0°, 180°)$ i $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$

oraz

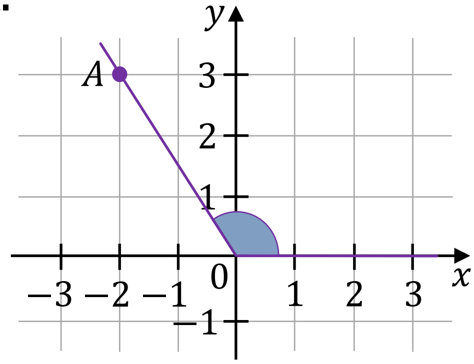
$\beta \in (0°, 180°)$ i $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ .

Na rysunkach A–F w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ zaznaczono różne kąty – w tym kąt o mierze $\alpha$ oraz kąt o mierze $\beta$. Jedno z ramion każdego z tych kątów pokrywa się z dodatnią półosią $Ox$, a drugie przechodzi przez jeden z punktów o współrzędnych całkowitych: $A$ lub $B$, lub $C$, lub $D$, lub $E$, lub $F$.

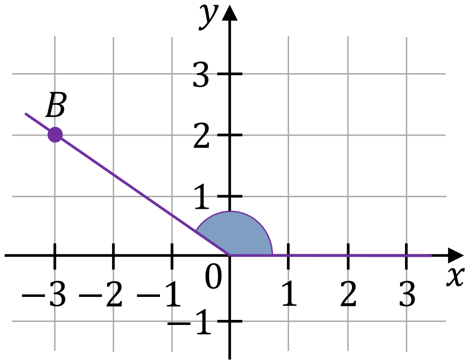
**Uzupełnij tabelę. Wpisz w każdą pustą komórkę tabeli właściwą odpowiedź, wybraną spośród oznaczonych literami A–F.**

| | | |
|---|---|---|
| **16.1.** | Kąt $\alpha$ jest zaznaczony na rysunku | |
| **16.2.** | Kąt $\beta$ jest zaznaczony na rysunku | |

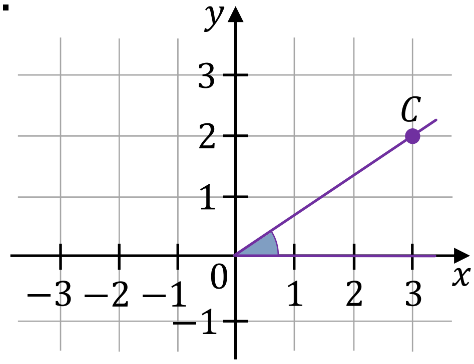
**A.**



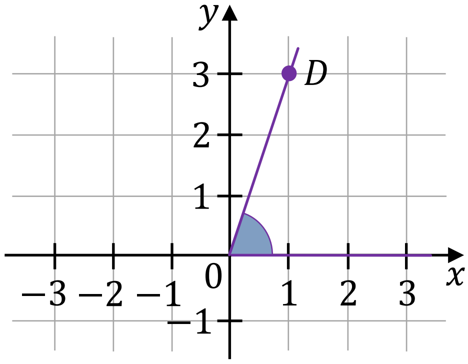

**B.**



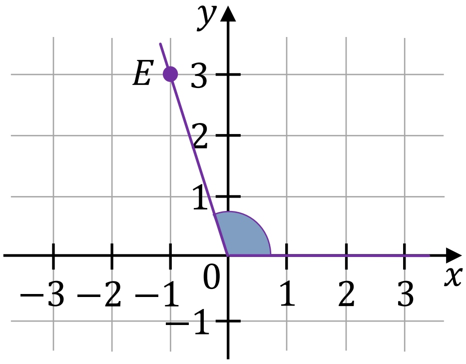
**C.**



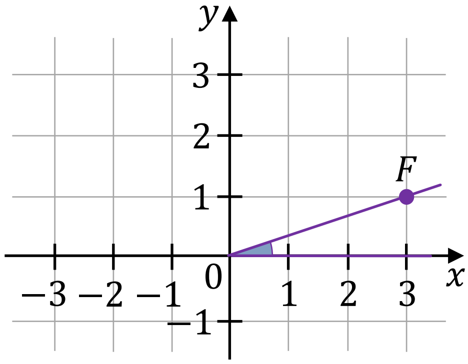

**D.**




**E.**




**F.**




BRUDNOPIS

## Zadanie 17. (1 pkt)

Kąt $\alpha$ jest ostry oraz $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Tangens kąta $\alpha$ jest równy

**A.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

**B.** $\frac{2}{3}$

**C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

**D.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

BRUDNOPIS

## Zadanie 18. (1 pkt)

W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ dana jest prosta $l$ o równaniu $y = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$. Prosta $k$ jest prostopadła do prostej $l$ i przechodzi przez punkt $P = (6, 0)$.

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Prosta $k$ ma równanie

**A.** $y = \frac{3}{2}x + 6$

**B.** $y = -\frac{2}{3}x + 6$

**C.** $y = \frac{3}{2}x - 9$

**D.** $y = -\frac{2}{3}x + 4$

BRUDNOPIS

## Zadanie 19. (1 pkt)

W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ dane są proste $k$ oraz $l$ o równaniach

$$k:\ \ y = -\frac{1}{2}x - 7$$

$$l:\ \ y = (2m - 1)x + 13$$

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Proste $k$ oraz $l$ są równoległe, gdy

**A.** $m = \left(-\frac{1}{2}\right)$

**B.** $m = \frac{1}{4}$

**C.** $m = \frac{3}{2}$

**D.** $m = 2$

BRUDNOPIS

## Zadanie 20. (1 pkt)

W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ dany jest okrąg $\mathcal{O}$ o środku w punkcie $S = (4, -2)$. Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do osi $Ox$ układu współrzędnych.

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Okrąg $\mathcal{O}$ jest określony równaniem

**A.** $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$

**B.** $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 2$

**C.** $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$

**D.** $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 2$

BRUDNOPIS

## Zadanie 21. (1 pkt)

W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ punkty $K = (-7, -2)$ oraz $L = (-1, 4)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego $KLM$.

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Pole trójkąta $KLM$ jest równe

**A.** $17\sqrt{2}$

**B.** $17\sqrt{3}$

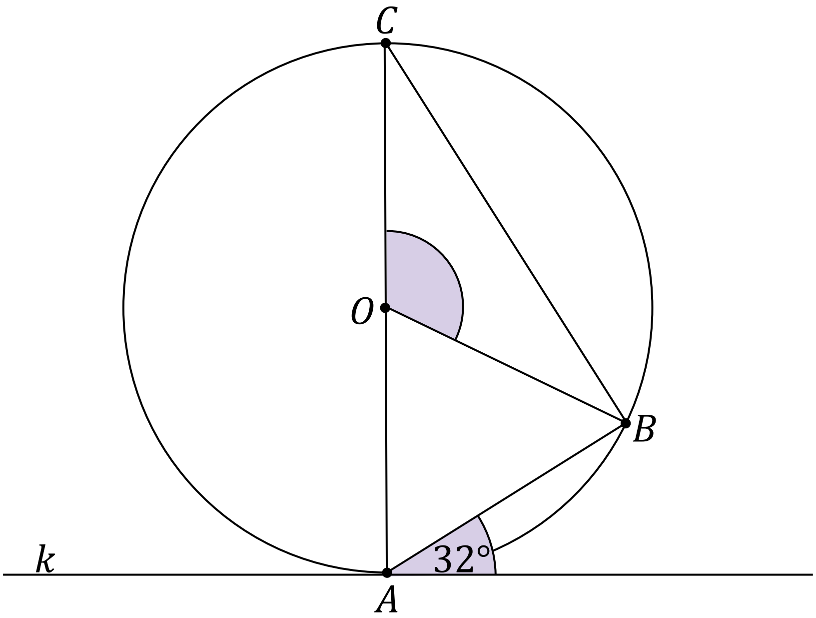
**C.** $18\sqrt{2}$

**D.** $18\sqrt{3}$

BRUDNOPIS

## Zadanie 22. (1 pkt)

Punkty $A$, $B$ oraz $C$ leżą na okręgu o środku w punkcie $O$. Prosta $k$ jest styczna do tego okręgu w punkcie $A$ i tworzy z cięciwą $AB$ kąt o mierze $32°$. Ponadto odcinek $AC$ jest średnicą tego okręgu (zobacz rysunek).




**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Miara kąta rozwartego $BOC$ jest równa

**A.** $148°$

**B.** $116°$

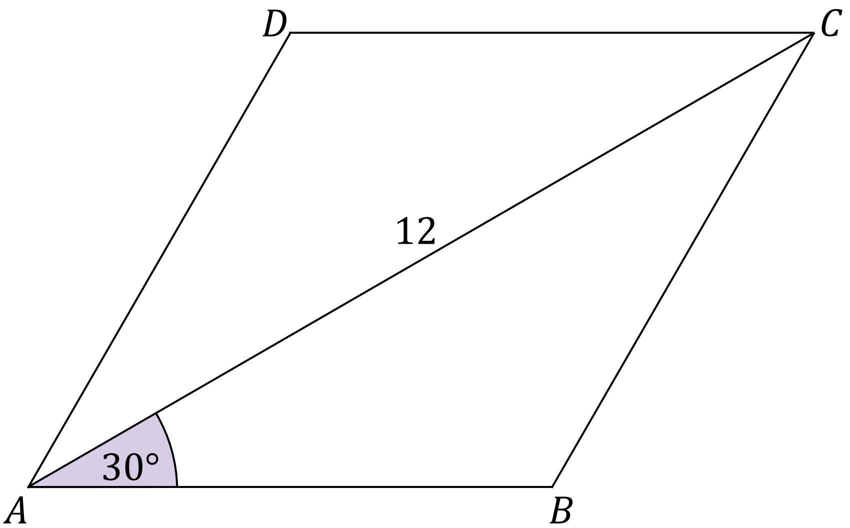
**C.** $154°$

**D.** $122°$

| BRUDNOPIS |
|---|

## Zadanie 23. (1 pkt)

W rombie $ABCD$ dłuższa przekątna $AC$ ma długość $12$ i tworzy z bokiem $AB$ kąt o mierze $30°$ (zobacz rysunek).




**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Pole rombu $ABCD$ jest równe

**A.** $24$

**B.** $36$

**C.** $24\sqrt{3}$

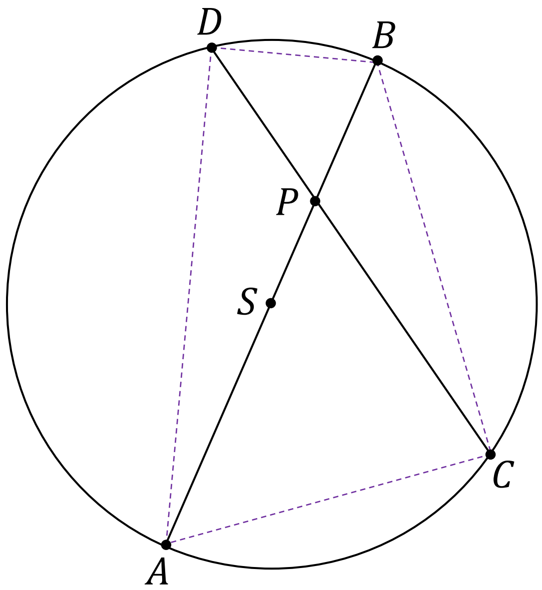
**D.** $36\sqrt{2}$

BRUDNOPIS

## Zadanie 24. (2 pkt)

Dany jest okrąg $\mathcal{O}$ o środku w punkcie $S$. Średnica $AB$ tego okręgu przecina cięciwę $CD$ w punkcie $P$ (zobacz rysunek).

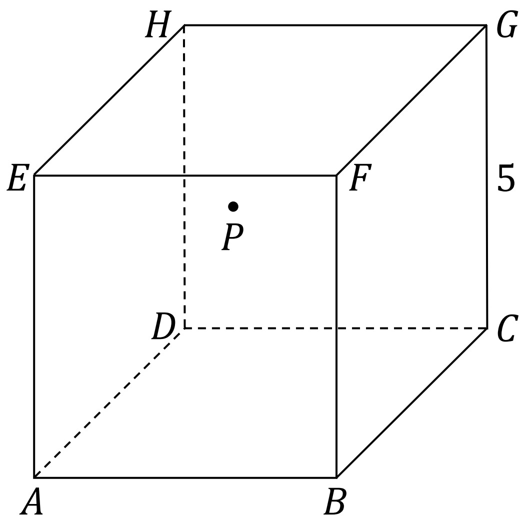
Ponadto: $|PB| = 4$, $|PC| = 8$ oraz $|PD| = 5$.




**Oblicz promień okręgu $\mathcal{O}$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 25. (1 pkt)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości $5$. Wewnątrz sześcianu znajduje się punkt $P$ (zobacz rysunek).




**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Suma odległości punktu $P$ od wszystkich ścian sześcianu $ABCDEFGH$ jest równa

**A.** $15$

**B.** $20$

**C.** $25$

**D.** $30$

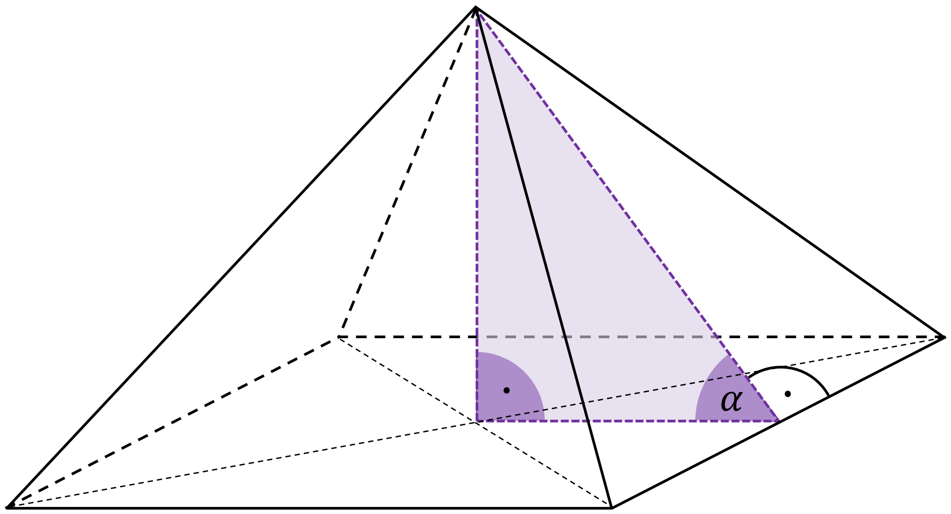
| BRUDNOPIS |
|---|

**Zadanie 26. (3 pkt)**

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $384$.

Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną

podstawy kąt o mierze $\alpha$ taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ (zobacz rysunek).




**Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 27. (2 pkt)

E-dowód ma zapisany na pierwszej stronie specjalny sześciocyfrowy numer CAN, który zabezpiecza go przed odczytaniem danych przez osoby nieuprawnione.

**Oblicz, ile jest wszystkich sześciocyfrowych numerów CAN o różnych cyfrach, spełniających warunek: trzy pierwsze cyfry są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy $(-3)$.**
**Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 28. (1 pkt)

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą nieparzystą, jest równe

**A.** $\frac{1}{2}$

**B.** $\frac{1}{5}$

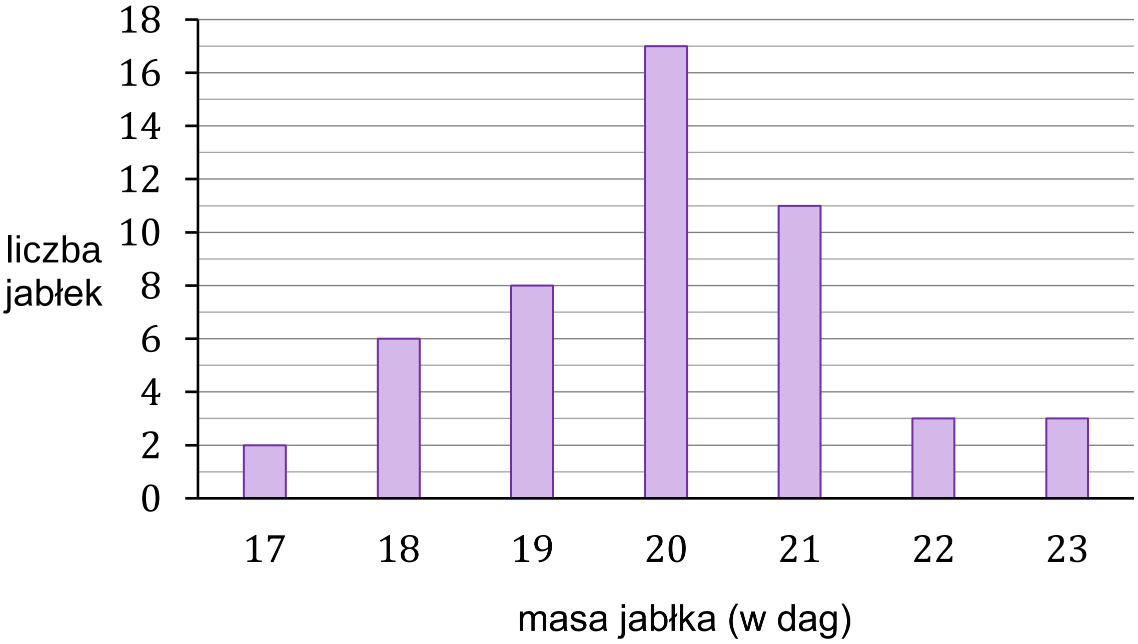
**C.** $\frac{1}{4}$

**D.** $\frac{3}{4}$

BRUDNOPIS

**Zadanie 29.**

W hurtowni owoców wyselekcjonowane jabłko spełnia normę jakości, gdy jego masa (po zaokrągleniu do pełnych dekagramów) mieści się w przedziale $[19 \text{ dag}, 21 \text{ dag}]$. Pobrano próbę kontrolną liczącą $50$ jabłek i następnie zważono każde z nich. Na poniższym wykresie słupkowym przedstawiono rozkład masy jabłek w badanej próbie. Na osi poziomej podano – wyrażoną w dekagramach – masę jabłka (w zaokrągleniu do pełnych dekagramów), a na osi pionowej przedstawiono liczbę jabłek o określonej masie.



## Zadanie 29.1. (1 pkt)

Spośród $50$ zważonych jabłek z pobranej próby kontrolnej losujemy jedno jabłko.

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowane jabłko spełnia normę jakości, jest równe

**A.** $\frac{3}{7}$

**B.** $\frac{5}{7}$

**C.** $\frac{18}{25}$

**D.** $\frac{9}{10}$

BRUDNOPIS

**Zadanie 29.2 znajduje się na następnej stronie.**

## Zadanie 29.2. (1 pkt)

**Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Zaznacz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.**

Dominanta masy $50$ zważonych jabłek (w zaokrągleniu do pełnych dekagramów) z pobranej próby kontrolnej jest równa

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **A.** | $20$ dag, | ponieważ | **1.** | ta masa jest największa w tej próbie. |
| | | | **2.** | iloczyn tej masy i liczby jabłek o takiej masie jest największy w tej próbie. |
| **B.** | $23$ dag, | | **3.** | ta masa występuje najliczniej w tej próbie. |

BRUDNOPIS

## Zadanie 30. (4 pkt)

Zgodnie z założeniem architekta okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, który nie jest równoległobokiem. Dłuższa podstawa trapezu ma mieć długość $12\ \mathrm{dm}$, a suma długości krótszej podstawy i wysokości tego trapezu ma być równa $18\ \mathrm{dm}$.

**Oblicz, jaką długość powinna mieć krótsza podstawa tego trapezu, tak aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole. Zapisz obliczenia.**

**BRUDNOPIS** (nie podlega ocenie)

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

*Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

*Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

*Formuła 2023*