CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny** **Test diagnostyczny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	MMAP-P0-100, MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-660, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00, MMAP-P0-K00, MMAU-P0-100
Termin egzaminu:	7 grudnia 2023 r.
Data publikacji dokumentu:	12 grudnia 2023 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] potęgowanie […]) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. 2022, poz.1246).

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm […] ilorazu […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych z kapitalizacją roczną i zysków z lokat.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: […] $\|x-2\|<3$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych.

Zasady oceniania
2 pkt – założenie, że $n=2l+1$ **oraz** przekształcenie wyrażenia $3n^2+4n+1$ do postaci $4(3l^2+5l+2)$ **oraz** zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $3l^2+5l+2$ jest liczbą całkowitą
ALBO
– stwierdzenie, że składnik $4n$ jest podzielny przez 4, oraz założenie, że $n=2l+1$ **oraz** przekształcenie wyrażenia $3n^2+1$ do postaci $4(3l^2+3l+1)$ i zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $3l^2+3l+1$ jest liczbą całkowitą,
ALBO
– przekształcenie wyrażenia $3n^2+4n+1$ do postaci $(3n+1)(n+1)$ **oraz** stwierdzenie, że wyrażenie $(3n+1)(n+1)$ jest iloczynem dwóch liczb parzystych,
ALBO
– przekształcenie wyrażenia $3n^2+4n+1$ do postaci $4(n^2+n)+(1-n)(1+n)$ **oraz** stwierdzenie, że wyrażenie $4(n^2+n)+(1-n)(1+n)$ jest sumą dwóch liczb podzielnych przez 4,
ALBO

– przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $2(n^2 + n) + (n + 1)^2$ **oraz** stwierdzenie, że wyrażenie $2(n^2 + n) + (n + 1)^2$ jest sumą dwóch liczb podzielnych przez 4,
ALBO
– rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 1$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(12l^2 + 10l + 2)$ i zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $12l^2 + 10l + 2$ jest liczbą całkowitą **oraz** rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 3$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(12l^2 + 22l + 10)$ i zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $12l^2 + 22l + 10$ jest liczbą całkowitą.

1 pkt – założenie, że $n = 2l + 1$ oraz zapisanie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ w postaci $3(4l^2 + 4l + 1) + 4(2l + 1) + 1$
ALBO
– stwierdzenie, że składnik $4n$ jest podzielny przez 4, oraz założenie, że $n = 2l + 1$ oraz przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 1$ do postaci $3(4l^2 + 4l + 1) + 1$,
ALBO
– przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $(3n + 1)(n + 1)$,
ALBO
– przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(n^2 + n) + (1 - n)(1 + n)$,
ALBO
– przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $2(n^2 + n) + (n + 1)^2$,
ALBO
– rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 1$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(12l^2 + 10l + 2)$ i zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $12l^2 + 10l + 2$ jest liczbą całkowitą,
ALBO
– rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 3$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(12l^2 + 22l + 10)$ i zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $12l^2 + 22l + 10$ jest liczbą całkowitą.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ liczba n jest nieparzysta, więc zapisujemy ją w postaci $n = 2l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$. Wówczas badana liczba ma postać

$$3n^2 + 4n + 1 = 3(2l + 1)^2 + 4(2l + 1) + 1 = 3(4l^2 + 4l + 1) + 8l + 4 + 1$$
$$= 12l^2 + 12l + 3 + 8l + 5 = 12l^2 + 20l + 8 = 4(3l^2 + 5l + 2)$$

Ponieważ $l \in \mathbb{Z}$, więc również $3l^2 + 5l + 2$ jest liczbą całkowitą. Zatem iloczyn $4(3l^2 + 5l + 2)$ jest podzielny przez 4. To należało wykazać.

Sposób II

Liczba $3n^2 + 4n + 1$ jest sumą trzech składników. Składnik $4n$ jest podzielny przez 4 dla dowolnej liczby całkowitej n. Wystarczy zatem udowodnić, że liczba $3n^2 + 1$ jest podzielna przez 4 dla dowolnej nieparzystej liczby n. Ponieważ liczba n jest nieparzysta, więc zapisujemy ją w postaci $n = 2l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$. Wówczas liczba $3n^2 + 1$ ma postać

$$3n^2 + 1 = 3(2l + 1)^2 + 1 = 3(4l^2 + 4l + 1) + 1 = 12l^2 + 12l + 3 + 1$$

$$= 12l^2 + 12l + 4 = 4(3l^2 + 3l + 1)$$

Ponieważ $l \in \mathbb{Z}$, więc również $3l^2 + 3l + 1$ jest liczbą całkowitą. Zatem iloczyn $4(3l^2 + 3l + 1)$ jest podzielny przez 4. To należało wykazać.

Sposób III

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $3n^2 + 4n + 1$ oraz jego pierwiastki

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$$

$$n_1 = \frac{-4 + 2}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$n_2 = \frac{-4 - 2}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$

Następnie zapisujemy liczbę $3n^2 + 4n + 1$ w postaci iloczynu

$$3n^2 + 4n + 1 = 3\left(n + \frac{1}{3}\right)(n + 1) = (3n + 1)(n + 1)$$

Liczba n jest nieparzysta, zatem liczby $3n + 1$ oraz $n + 1$ są parzyste (suma dwóch liczb nieparzystych). Stąd iloczyn $(3n + 1)(n + 1)$ jest liczbą podzielną przez $2 \cdot 2$, czyli przez 4. To należało wykazać.

Sposób IV

Zapisujemy liczbę $3n^2 + 4n + 1$ w postaci sumy dwóch liczb podzielnych przez 4

$$3n^2 + 4n + 1 = 4n^2 - n^2 + 4n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 - n^2 = 4(n^2 + n) + (1 - n)(1 + n)$$

Liczba $4(n^2 + n)$ jest podzielna przez 4 dla dowolnej liczby całkowitej n.
Liczba n jest nieparzysta, zatem liczby $1 - n$ oraz $1 + n$ są parzyste (różnica oraz suma dwóch liczb nieparzystych). Stąd iloczyn $(1 - n)(1 + n)$ jest liczbą podzielną przez $2 \cdot 2$, czyli przez 4. Zatem liczba $3n^2 + 4n + 1$ jest podzielna prze 4 jako suma dwóch liczb podzielnych przez 4.

Sposób V

Rozważmy dwa przypadki: gdy n jest liczbą, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, oraz gdy n jest liczbą, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3.

Jeśli n jest liczbą, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, to możemy ją zapisać w postaci $n = 4l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$. Wówczas badana liczba ma postać

$$3n^2 + 4n + 1 = 3(4l + 1)^2 + 4(4l + 1) + 1 = 3(16l^2 + 8l + 1) + 16l + 4 + 1$$

$$= 48l^2 + 24l + 3 + 16l + 5 = 48l^2 + 40l + 8 = 4(12l^2 + 10l + 2)$$

Ponieważ $l \in \mathbb{Z}$, więc suma $12l^2 + 10l + 2$ jest liczbą całkowitą. Zatem iloczyn $4(12l^2 + 10l + 2)$ jest podzielny przez 4.

Jeśli n jest liczbą, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, to możemy ją zapisać w postaci $n = 4l + 3$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$. Wówczas badana liczba ma postać

$$3n^2 + 4n + 1 = 3(4l + 3)^2 + 4(4l + 3) + 1 = 3(16l^2 + 24l + 9) + 16l + 12 + 1$$

$$= 48l^2 + 72l + 27 + 16l + 13 = 48l^2 + 88l + 40 = 4(12l^2 + 22l + 10)$$

Ponieważ $l \in \mathbb{Z}$, więc suma $12l^2 + 22l + 10$ jest liczbą całkowitą. Zatem iloczyn $4(12l^2 + 22l + 10)$ jest podzielny przez 4.

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2; II.5) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej […]; V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 9. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny; III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów […] takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej […] metodą grupowania.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i obliczenie wszystkich rozwiązań równania:

$(-\sqrt{5})$, $\left(-\frac{3}{2}\right)$, $\sqrt{5}$.

2 pkt – przekształcenie równania $2x^3+3x^2=10x+15$ do postaci $W(x)=0$, gdzie W jest iloczynem wielomianów stopnia co najwyżej drugiego **oraz** rozwiązanie jednego z równań wynikającego z tego rozkładu, np.

$(2x+3)(x^2-5)=0$ i $x=-\frac{3}{2}$

ALBO

– przekształcenie równania $2x^3+3x^2=10x+15$ do postaci $W(x)=0$, gdzie W jest wielomianem rozłożonym na czynniki liniowe, np.

$W(x)=(2x+3)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$,

ALBO

– przekształcenie równania $2x^3+3x^2=10x+15$ do postaci $W(x)=0$, gdzie W jest wielomianem stopnia trzeciego **oraz** obliczenie jednego z pierwiastków wielomianu W **oraz** poprawne podzielenie wielomianu W przez odpowiedni dwumian, np.

$x=-\frac{3}{2}$ i $(2x^3+3x^2-10x-15):\left(x+\frac{3}{2}\right)=2x^2-10$,

ALBO

– przekształcenie równania $2x^3+3x^2=10x+15$ do postaci alternatywy równań **oraz** rozwiązanie jednego z nich, tj. zapisanie:

$(2x+3=0,\ x^2-5=0)$ oraz $x=-\frac{3}{2}$

albo

$(2x+3=0,\ x^2-5=0)$ oraz $(x=-\sqrt{5}\ ,\ x=\sqrt{5})$,

albo

$(2x+3=0,\ x-\sqrt{5}=0,\ x+\sqrt{5}=0)$ oraz $x=-\sqrt{5}$,

albo

$(2x+3=0,\ x-\sqrt{5}=0,\ x+\sqrt{5}=0)$ oraz $x=\sqrt{5}$,

albo

$(2x+3=0,\ x-\sqrt{5}=0,\ x+\sqrt{5}=0)$ oraz $x=-\frac{3}{2}$.

1 pkt – przekształcenie równania $2x^3+3x^2=10x+15$ do postaci $W(x)=0$, gdzie W jest iloczynem wielomianów stopnia co najwyżej drugiego, np. $W(x)=(2x+3)(x^2-5)$

ALBO

– zapisanie jednego rozwiązania wymiernego równania $2x^3+3x^2=10x+15$ lub dwóch rozwiązań niewymiernych tego równania, jeśli te rozwiązania nie zostały otrzymane w wyniku zastosowania błędnej metody,

ALBO

– przekształcenie równania $2x^3+3x^2=10x+15$ do postaci alternatywy równań, (np. $2x+3=0$, $x^2=5$), przy czym alternatywa musi wynikać z poprawnego wnioskowania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze tylko trzy poprawne rozwiązania równania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający uzyska tylko dwa poprawne rozwiązania $x=\sqrt{5}$ oraz $x=-\sqrt{5}$ w wyniku dzielenia obustronnie równania przez dwumian $(2x+3)$ z podaniem odpowiednich założeń, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający uzyska dwa poprawne rozwiązania $x=\sqrt{5}$ oraz $x=-\sqrt{5}$ w wyniku dzielenia obustronnie równania przez dwumian $(2x+3)$ bez podania odpowiednich założeń lub w wyniku zauważenia, że obie strony równania $x^2(2x+3)=5(2x+3)$ zawierają ten sam czynnik $2x+3$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

4. Jeżeli zdający uzyska trzy poprawne pierwiastki wielomianu, lecz traktuje równanie jako nierówność (podaje zbiór rozwiązań w postaci przedziału/ sumy przedziałów), to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

5. Jeżeli zdający przy przekształcaniu równania do postaci $W(x)=0$ zapisuje czynnik $(2x+3)$ z wykładnikiem 2, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za zapisanie alternatywy równań oraz za rozwiązanie równań tej alternatywy).

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równanie równoważnie, stosując metodę grupowania wyrazów:

$$2x^3+3x^2=10x+15$$

$$2x^3+3x^2-10x-15=0$$

$$x^2(2x+3)-5(2x+3)=0$$

$$(2x+3)(x^2-5)=0$$

$$(2x+3)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)=0$$

$$2x+3=0 \quad \text{lub} \quad x-\sqrt{5}=0 \quad \text{lub} \quad x+\sqrt{5}=0$$

$$x=-\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x=\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x=-\sqrt{5}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $\left(-\sqrt{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}\right)$, $\sqrt{5}$.

Sposób II

Przekształcamy równanie równoważnie, stosując metodę grupowania wyrazów:

$$2x^3+3x^2=10x+15$$

$$2x^3+3x^2-10x-15=0$$

$$2x(x^2-5)+3(x^2-5)=0$$

$$(2x+3)(x^2-5)=0$$

$$(2x+3)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)=0$$

$$2x+3=0 \quad \text{lub} \quad x-\sqrt{5}=0 \quad \text{lub} \quad x+\sqrt{5}=0$$

$$x=-\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x=\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x=-\sqrt{5}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $\left(-\sqrt{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}\right)$, $\sqrt{5}$.

Sposób III

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$2x^3+3x^2=10x+15$$

$$2x^3+3x^2-10x-15=0$$

Obliczamy $W\left(-\frac{3}{2}\right)=0$ i stwierdzamy, że liczba $\left(-\frac{3}{2}\right)$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=2x^3+3x^2-10x-15$.

Zatem wielomian W jest podzielny przez dwumian $x+\frac{3}{2}$. Dzielimy wielomian W przez dwumian $x+\frac{3}{2}$ i otrzymujemy

$$(2x^3+3x^2-10x-15):\left(x+\frac{3}{2}\right)=2x^2-10$$

Zatem $W(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2-10)=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x^2-5)=2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$.

Obliczamy pierwiastki wielomianu W:

$$2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)=0$$

$$x+\frac{3}{2}=0 \quad \text{lub} \quad x-\sqrt{5}=0 \quad \text{lub} \quad x+\sqrt{5}=0$$

$$x=-\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x=\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x=-\sqrt{5}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $\left(-\sqrt{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}\right)$, $\sqrt{5}$.

Sposób IV

Przekształcamy równanie do postaci alternatywy dwóch równań

$$2x^3+3x^2=10x+15$$

$$x^2(2x+3)=5(2x+3)$$

Zatem

$$2x+3=0 \quad \text{lub} \quad x^2=5$$

$$x=-\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x=\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x=-\sqrt{5}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $\left(-\sqrt{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}\right)$, $\sqrt{5}$.

Sposób V

Przekształcamy równanie równoważnie

$$2x^3+3x^2=10x+15$$

$$x^2(2x+3)=5(2x+3)$$

Zatem $x=-\frac{3}{2}$ jest rozwiązaniem tego równania.

Rozwiązujemy równanie $x^2(2x+3)=5(2x+3)$ w zbiorze $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$

$$x^2(2x+3)=5(2x+3) \quad /:(2x+3)$$

$$x^2=5$$

$$x=\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x=-\sqrt{5}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $\left(-\sqrt{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}\right)$, $\sqrt{5}$.

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Zadanie 11.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] zbiór wartości […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 11.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
$(2, 6)$

Zadanie 11.3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania
2 pkt – dwie poprawne odpowiedzi.
1 pkt – jedna poprawna odpowiedź.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
AB

Zadanie 11.4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.13) posługuje się funkcją wykładniczą […] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi; V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.4) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 14. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; VI.5) stosuje wzór […] na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PF

Zadanie 15. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.6) wykorzystuje własności ciągów […] geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: […] cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$ […].

Zasady oceniania
2 pkt – dwie poprawne odpowiedzi.
1 pkt – jedna poprawna odpowiedź.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
16.1. B
16.2. D

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$ […]; VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład […] prostopadłość do innej prostej […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład […] równoległość […] do innej prostej […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 20. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 21. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 22. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych; VIII.7) stosuje twierdzenie […] o kącie między styczną a cięciwą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 23. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w […] rombach […]; VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 24. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa; VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
2 pkt – poprawna metoda i obliczenie promienia okręgu $\mathcal{O}$: $r = 7$.

1 pkt – stwierdzenie i wykazanie, że trójkąty APC oraz BPD są podobne
ALBO
– stwierdzenie i wykazanie, że trójkąty APD oraz BPC są podobne,
ALBO
– zapisanie równości, wynikającej z podobieństwa trójkątów lub twierdzenia o siecznych, prowadzącej do obliczenia długości odcinka PA, np.
$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}$, $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Z warunków zadania otrzymujemy:

- $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$, ponieważ są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku AD,
- $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$, ponieważ są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku BC,
- $|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle BPD|$, ponieważ są to kąty wierzchołkowe.

Zatem trójkąty ACP oraz BPD są podobne na podstawie cechy KKK (kąt – kąt – kąt).

Z podobieństwa trójkątów ACP oraz BPD otrzymujemy:

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}$$

$$\frac{|PA|}{5} = \frac{8}{4}$$

$$|PA| = 10$$

$$|AB| = |AP| + |PB| = 10 + 4 = 14$$

Zatem promień r okręgu $\mathcal{O}$ jest równy:

$$r = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$$

Sposób II

Z warunków zadania otrzymujemy:

- $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC|$, ponieważ są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku AC,
- $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD|$, ponieważ są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku BD,
- $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle BPC|$, ponieważ są to kąty wierzchołkowe.

Zatem trójkąty APD oraz BPC są podobne na podstawie cechy KKK (kąt – kąt – kąt).

Z podobieństwa trójkątów APD oraz BPC otrzymujemy:

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$

$$\frac{|PA|}{8} = \frac{5}{4}$$

$$|PA| = 10$$

$$|AB| = |AP| + |PB| = 10 + 4 = 14$$

Zatem promień r okręgu $\mathcal{O}$ jest równy:

$$r = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$$

Sposób III

Korzystamy z twierdzenia o siecznych okręgu:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

$$|PA| \cdot 4 = 8 \cdot 5$$

$$|PA| = 10$$

Obliczamy długość średnicy okręgu AB:

$$|AB| = |AP| + |PB| = 10 + 4 = 14$$

Zatem promień r okręgu $\mathcal{O}$ jest równy:

$$r = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$$

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: X.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni […]; X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną; X.4) oblicza objętości […] graniastosłupów i ostrosłupów […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 26. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną; X.3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), oblicza miary tych kątów; X.4) oblicza objętości […] ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości ściany bocznej ostrosłupa **oraz** poprawny wynik: $h_b = 10$.

2 pkt – obliczenie współczynnika proporcjonalności: $x = 2$

ALBO

– obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 12$,

ALBO

– obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 8$,

ALBO

– zapisanie, że $H = 8$ i $\frac{1}{2}a = 6$ **oraz** sprawdzenie, że dla tych danych liczbowych objętość ostrosłupa jest równa 384,

– zapisanie równania z jedną niewiadomą h_b – wysokością ściany bocznej, np.

$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{5}h_b\right)^2 \cdot \frac{4}{5}h_b = 384$,

– obliczenie objętości $V_1 = 48$ ostrosłupa o krawędzi podstawy $a_1 = 6$ i wysokości $H_1 = 4$, podobnego do rozpatrywanego **oraz** obliczenie skali podobieństwa tych ostrosłupów, np. $k = \sqrt[3]{\frac{384}{48}} = 2$.

1 pkt – oznaczenie połowy krawędzi podstawy jako $3x$ i zapisanie wysokości ostrosłupa jako $4x$ **oraz** zapisanie wysokości ściany bocznej jako $5x$, gdzie x jest współczynnikiem proporcjonalności

ALBO

– oznaczenie połowy krawędzi podstawy jako $3x$ i zapisanie wysokości ostrosłupa jako $4x$ **oraz** zapisanie równania z jedną niewiadomą x prowadzącego do wyznaczenia krawędzi podstawy oraz wysokości ostrosłupa, np.

$\frac{1}{3} \cdot (6x)^2 \cdot 4x = 384$,

ALBO

– zapisanie dwóch równań z niewiadomymi a oraz H prowadzących do wyznaczenia krawędzi podstawy oraz wysokości ostrosłupa, np.
$\frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{4}{3}$ oraz $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = 384$,
ALBO
– zapisanie zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy oraz wysokością ściany bocznej np. $\frac{\frac{1}{2}a}{h_b} = \frac{3}{5}$ **oraz** zapisanie zależności pomiędzy wysokością ostrosłupa oraz wysokością ściany bocznej, np. $\frac{H}{h_b} = \frac{4}{5}$,
– obliczenie objętości $V_1 = 48$ ostrosłupa o krawędzi podstawy $a_1 = 6$ i wysokości $H_1 = 4$, podobnego do rozpatrywanego **oraz** zapisanie stosunku objętości tych ostrosłupów, np. $\frac{V}{V_1} = \frac{384}{48}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający przyjmuje w rozwiązaniu, że jedna ze ścian bocznych ostrosłupa jest trójkątem równobocznym i wykorzystuje to do obliczenia wysokości ściany bocznej, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
2. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:
a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej
b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa
c) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
d) uwzględnienie we wzorze na objętość ostrosłupa połowy długości krawędzi podstawy

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył praw do innej liczby punktów.
Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a) – d), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający jedynie zapisze lub obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 3 i 4, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy wysokość ściany bocznej ostrosłupa opuszczoną z wierzchołka podstawy na krawędź boczną, to otrzymuje **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I
Przyjmujemy oznaczenia:
α – miara kąta pomiędzy wysokością ściany bocznej a podstawą,
a – długość krawędzi podstawy,
H – wysokość ostrosłupa,
h_b – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,
V – objętość ostrosłupa,
P_p – pole podstawy ostrosłupa.

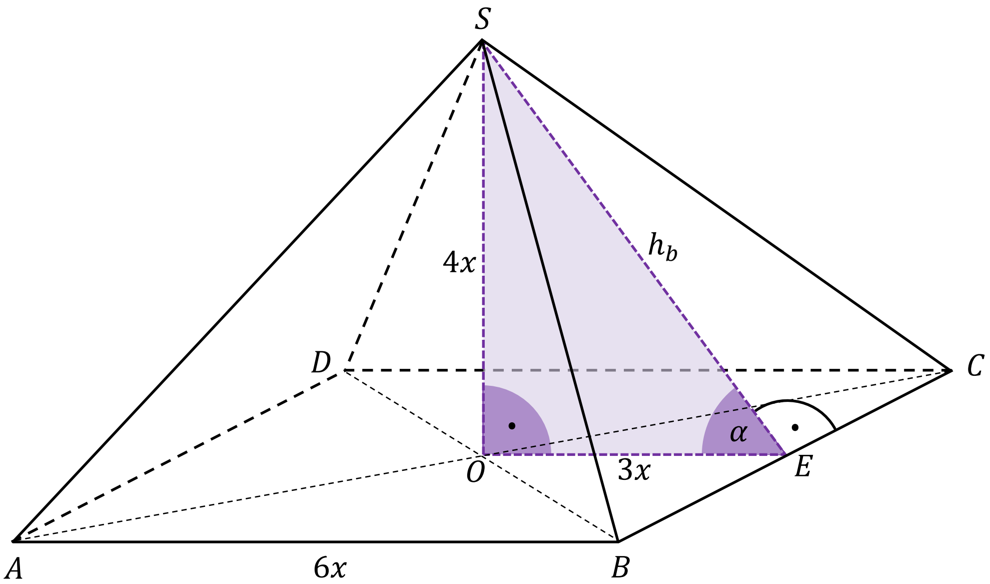
Zauważamy, że $\alpha \in (0°, 90°)$ oraz $a > 0$, $H > 0$ i $h_b > 0$.

Ponieważ O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu, więc $|OE| = \frac{1}{2}a$.

W trójkącie prostokątnym SOE mamy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|SO|}{|OE|} = \frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{4}{3}$$

Zatem $|SO| = 4x$ oraz $|OE| = 3x$ (zobacz rysunek)



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|SE|^2 = |SO|^2 + |OE|^2$$

$$(h_b)^2 = H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$(h_b)^2 = (4x)^2 + (3x)^2 = 16x^2 + 9x^2 = 25x^2$$

$$h_b = 5x$$

Ponadto

$$V = \frac{1}{3} \cdot Pp \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (6x)^2 \cdot 4x = \frac{1}{3} \cdot 36x^2 \cdot 4x = 48x^3$$

Stąd, że $V = 384$, otrzymujemy

$$48x^3 = 384$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

Obliczamy wysokość h_b ściany bocznej ostrosłupa:

$$h_b = 5x = 10$$

Sposób II

Przyjmujemy oznaczenia:

α – miara kąta pomiędzy wysokością ściany bocznej a podstawą,

a – długość krawędzi podstawy,

H – wysokość ostrosłupa,

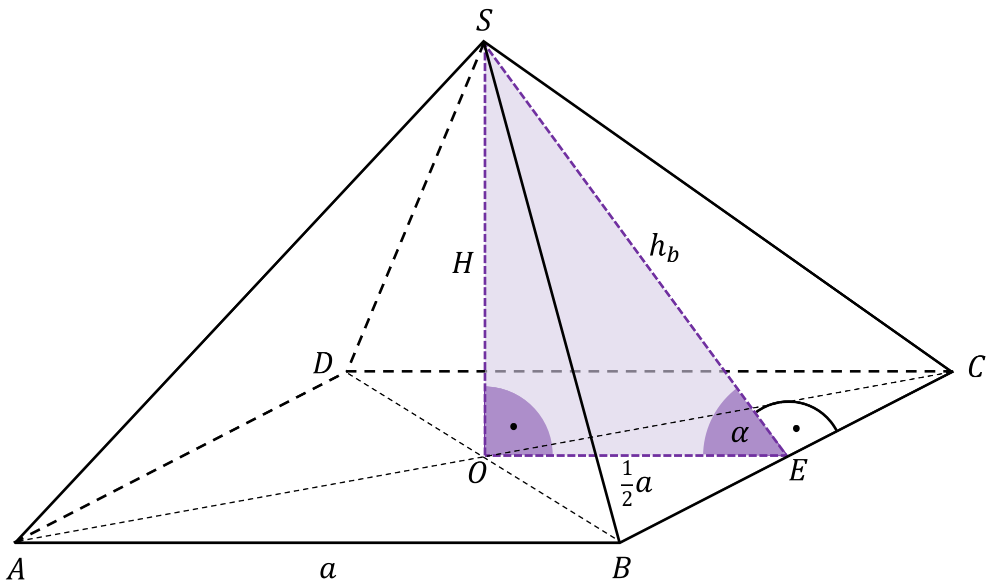
h_b – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,

V – objętość ostrosłupa,

P_p – pole podstawy ostrosłupa.

Zauważamy, że $\alpha \in (0°, 90°)$ oraz $a > 0$, $H > 0$ i $h_b > 0$.

Ponieważ O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu, więc $|OE| = \frac{1}{2}a$.



W trójkącie prostokątnym SOE mamy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|SO|}{|OE|} = \frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{4}{3}$$

Zatem

$$H = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{2}{3}a$$

Ponadto

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{2}{3}a = \frac{2}{9}a^3$$

Stąd, że $V = 384$, otrzymujemy

$$\frac{2}{9}a^3 = 384$$

$$a^3 = 384 : \frac{2}{9} = 384 \cdot \frac{9}{2} = 1728$$

$$a = 12$$

$$H = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość h_b ściany bocznej ostrosłupa:

$$|SE|^2 = |SO|^2 + |OE|^2$$

$$(h_b)^2 = H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$(h_b)^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

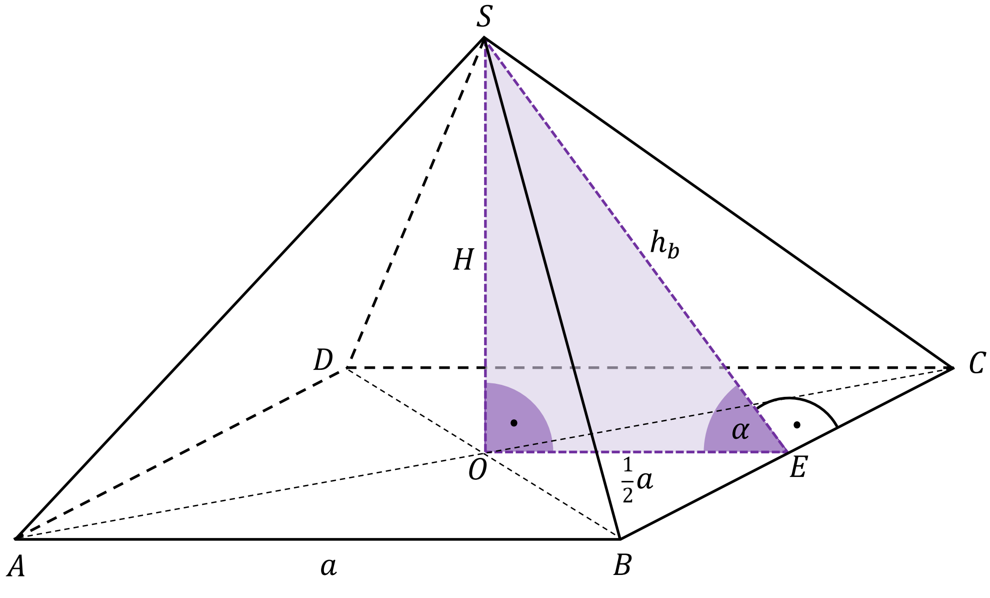
$$h_b = 10$$

Sposób III

Przyjmujemy oznaczenia:

α – miara kąta pomiędzy wysokością ściany bocznej a podstawą,
a – długość krawędzi podstawy,
H – wysokość ostrosłupa,
h_b – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,
V – objętość ostrosłupa,
P_p – pole podstawy ostrosłupa.

Zauważamy, że $\alpha \in (0°, 90°)$ oraz $a > 0$, $H > 0$ i $h_b > 0$.



Ponieważ O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu, więc $|OE| = \frac{1}{2}a$.

Z treści zadania wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, zatem $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}$. Stąd $\sin\alpha = \frac{4}{3}\cdot\cos\alpha$.
Wykorzystując tę zależność oraz tożsamość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ otrzymujemy

$$\left(\frac{4}{3}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{16}{9}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{25}{9}\cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$$

Stąd $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, ponieważ α jest kątem ostrym.
Zatem $\sin\alpha = \frac{4}{3}\cdot\cos\alpha = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

Z trójkąta prostokątnego AOS otrzymujemy

$$\sin\alpha = \frac{H}{h_b} \quad \text{oraz} \quad \cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{h_b}$$

Zatem

$$\frac{H}{h_b} = \frac{4}{5} \quad \text{oraz} \quad \frac{\frac{1}{2}a}{h_b} = \frac{3}{5}$$

$$H = \frac{4}{5}h_b \quad \text{oraz} \quad a = \frac{6}{5}h_b$$

Ponadto

$$V = \frac{1}{3}\cdot P_p\cdot H = \frac{1}{3}\cdot a^2\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}h_b\right)^2\cdot\frac{4}{5}h_b = \frac{1}{3}\cdot\frac{36}{25}h_b^2\cdot\frac{4}{5}h_b = \frac{48}{125}h_b^3$$

Stąd, że $V = 384$, otrzymujemy

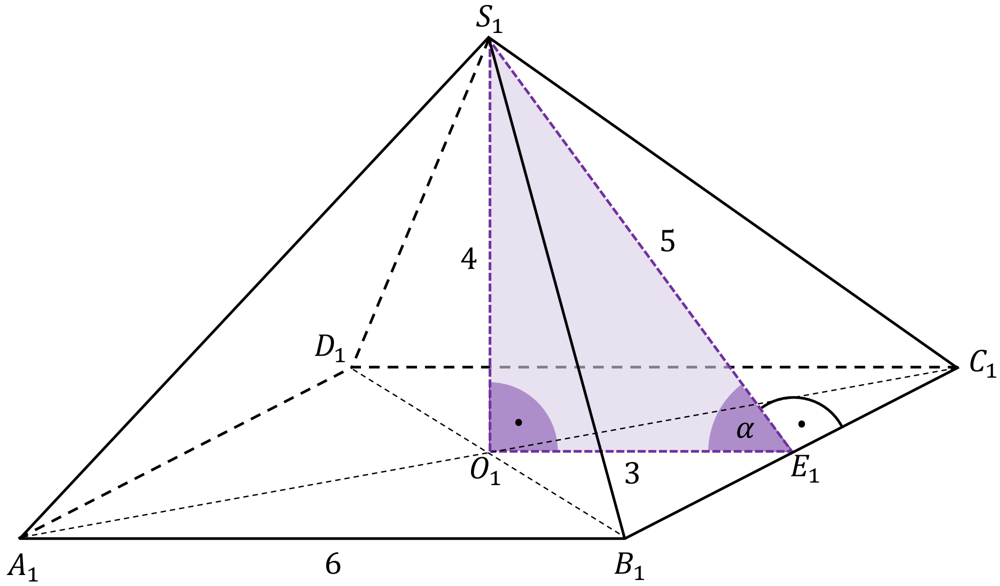
$$\frac{48}{125}h_b^3 = 384$$

$$h_b^3 = 384 : \frac{48}{125} = 384\cdot\frac{125}{48} = 1000$$

$$h_b = 10$$

Sposób IV

Rozważmy ostrosłup prawidłowy czworokątny $A_1B_1C_1D_1S_1$ o wysokości 4 i krawędzi podstawy długości 6.



Objętość tego ostrosłupa jest równa

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 48$$

Ostrosłup ten jest podobny do danego ostrosłupa, a stosunek ich objętości jest równy sześcianowi skali podobieństwa. Zatem

$$k^3 = \frac{V}{V_1} = \frac{384}{48} = 8$$

Stąd $k = 2$.

Ponieważ wysokość S_1E_1 ściany bocznej ostrosłupa $A_1B_1C_1D_1S_1$ jest równa 5, więc szukana wysokość ściany bocznej danego ostrosłupa jest równa $5 \cdot 2 = 10$.

Zadanie 27. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych; XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) […]; VI.6) wykorzystuje własności ciągów […] arytmetycznych […] do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda i obliczenie liczby numerów CAN spełniających warunki zadania: 840.

1 pkt – podanie liczby możliwości wyboru pierwszej, drugiej i trzeciej cyfry numeru CAN
ALBO
– wypisanie czterech trzywyrazowych ciągów arytmetycznych: $(9, 6, 3)$, $(8, 5, 2)$, $(7, 4, 1)$, $(6, 3, 0)$,
ALBO
– zapisanie liczby możliwości wyboru czwartej, piątej i szóstej cyfry numeru CAN: $7 \cdot 6 \cdot 5$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że w numerze CAN nie występuje cyfra 0 i konsekwentnie poda liczbę wszystkich numerów CAN, w których nie występuje cyfra 0, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający zapisze tylko 840, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Liczba wszystkich sześciocyfrowych numerów CAN spełniających warunki zadania jest iloczynem liczby możliwości ustawienia cyfr na trzech pierwszych miejscach i liczby możliwości ustawienia czwartej, piątej i szóstej cyfry.

Na pierwszych trzech miejscach znajdują się cyfry, które tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy (-3). Cztery trzywyrazowe ciągi spełniają powyższy warunek: $(9, 6, 3)$, $(8, 5, 2)$, $(7, 4, 1)$, $(6, 3, 0)$.

Czwartą cyfrę w numerze CAN możemy ustawić na 7 sposobów. Piątą cyfrę – na 6 sposobów. Szóstą cyfrę – na 5 sposobów.

Zatem liczba wszystkich sześciocyfrowych numerów CAN, spełniających warunki zadania, jest równa: $4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840$.

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych; III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 29.1 (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 29.2 (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel; IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: XII.2) […] znajduje […] dominantę.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A3

Zadanie 30. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia długości krótszej podstawy trapezu o największym polu i obliczenie największego pola trapezu **oraz** poprawne wyniki:
$b = 3\ \mathrm{dm}$, $P = 112{,}5\ \mathrm{dm}^2$.

3 pkt – zapisanie poprawnego wzoru na pole trapezu w zależności od zmiennej b **oraz** prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli: $b = 3$
ALBO
– zapisanie poprawnego wzoru na pole trapezu w zależności od zmiennej h **oraz** prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli: $h = 15$,
ALBO
– zapisanie poprawnej nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną dla liczb dodatnich, np. $(12 + b)$ i $(18 - b)$
$\sqrt{(12+b)(18-b)} \leq \frac{12+b+18-b}{2}$,
ALBO
– wyznaczenie pochodnej funkcji P **oraz** obliczenie jej miejsca zerowego, np.
$P'(b) = -b + 3$, $b = 3$.

2 pkt – zapisanie poprawnego wzoru na pole trapezu w zależności od jednej zmiennej:
$P(b) = \frac{1}{2}(12+b)(18-b)$ lub $P(h) = \frac{1}{2}(30-h)h$.

1 pkt – zapisanie związku między krótszą podstawą a wysokością trapezu: $b + h = 18$ **oraz** zapisanie wzoru na pole trapezu w zależności od dwóch zmiennych:
$P(b) = \frac{1}{2}(12+b)h$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze pole trapezu jako funkcję P jednej zmiennej, ale otrzyma wartość pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli zawierającej wykres funkcji P, która leży poza dziedziną funkcji P, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający zapisze pole trapezu jako funkcję P jednej zmiennej, a następnie obliczy wartości tej funkcji dla pierwszej współrzędnej wierzchołka i dwóch argumentów leżących symetrycznie względem pierwszej współrzędnej wierzchołka i nie odwoła się do własności wykresu funkcji kwadratowej, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający nie zapisze pola trapezu jako funkcji jednej zmiennej, a jedynie oblicza wartości pola dla wybranych par liczb b oraz h i na tej podstawie wskazuje największą wartość pola, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Sposób I

Przyjmujemy oznaczenia:

$a = 12$ – dłuższa podstawa trapezu,

b – krótsza podstawa trapezu,

h – wysokość trapezu.

Z warunków zadania otrzymujemy:

$$b + h = 18$$

Stąd wyznaczamy h:

$$h = 18 - b$$

Pole trapezu wyrażamy jako funkcję zmiennej b:

$$P(b) = \frac{1}{2}(12 + b)(18 - b) = -\frac{1}{2}(b + 12)(b - 18)$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P. Z warunków zadania wynika, że:

$$b > 0 \ \text{ oraz } \ h = 18 - b > 0 \ \text{ oraz } \ b < 12$$

Zatem

$$b > 0 \ \text{ oraz } \ b < 18 \ \text{ oraz } \ b < 12$$

Zmienna b może przyjmować wartość z przedziału $(0, 12)$.

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = \frac{-12 + 18}{2} = \frac{6}{2} = 3 \ \in (0, 12)$$

Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu 3.

Dla $b = 3$ pole tego trapezu jest równe:

$$P(3) = \frac{1}{2}(12 + 3)(18 - 3) = 112{,}5$$

Największe pole równe $112{,}5 \ \mathrm{dm}^2$ ma trapez, którego krótsza podstawa ma $3 \ \mathrm{dm}$.

Sposób II

Przyjmujemy oznaczenia:
$a = 12$ – dłuższa podstawa trapezu,
b – krótsza podstawa trapezu,
h – wysokość trapezu.

Z warunków zadania otrzymujemy:

$$b + h = 18$$

Stąd wyznaczamy b:

$$b = 18 - h$$

Pole trapezu wyrażamy jako funkcję zmiennej h:

$$P(h) = \frac{1}{2}(12 + 18 - h)h = \frac{1}{2}(30 - h)h$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P. Z warunków zadania wynika, że:

$$h > 0 \ \text{ oraz } \ b = 18 - h > 0 \ \text{ oraz } \ b = 18 - h < 12$$

Zatem

$$h > 0 \ \text{ oraz } \ h < 18 \ \text{ oraz } \ h > 6$$

Zmienna h może przyjmować wartość z przedziału $(6, 18)$.
Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = \frac{30 + 0}{2} = 15 \in (6, 18)$$

Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu 15.
Dla $h = 15$ pole tego trapezu jest równe:

$$P(15) = \frac{1}{2}(30 - 15)15 = 112{,}5$$

Obliczamy długość krótszej podstawy trapezu:

$$b = 18 - 15 = 3$$

Największe pole równe $112{,}5\ \mathrm{dm}^2$ ma trapez, którego krótsza podstawa ma $3\ \mathrm{dm}$.

Sposób III

Przyjmujemy oznaczenia:

$a = 12$ – dłuższa podstawa trapezu,

b – krótsza podstawa trapezu,

h – wysokość trapezu.

Z warunków zadania otrzymujemy:

$$b + h = 18$$

Stąd wyznaczamy h:

$$h = 18 - b$$

Pole trapezu wyrażamy jako funkcję zmiennej b:

$$P(b) = \frac{1}{2}(12 + b)(18 - b)$$

Z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną dla liczb dodatnich $(12 + b)$ i $(18 - b)$ otrzymujemy

$$\sqrt{(12 + b)(18 - b)} \le \frac{12 + b + 18 - b}{2}$$

$$\sqrt{(12 + b)(18 - b)} \le 15$$

Stąd

$$(12 + b)(18 - b) \le 225$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy $12 + b = 18 - b$, czyli dla $b = 3$.

Wtedy pole trapezu jest największe i równe $P(3) = \frac{1}{2} \cdot 225 = 112{,}5$.