Informator o egzaminie maturalnym

z matematyki

jako przedmiotu dodatkowego

(poziom rozszerzony)

od roku szkolnego 2022/2023

dla uczniów niewidomych

1. [Opis egzaminu maturalnego z matematyki](#opis_egzaminu) na poziomie rozszerzonym

Wstęp

Matematyka jest jednym z obowiązkowych przedmiotów na egzaminie maturalnym. Wszyscy zdający przystępują do egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym. Każdy maturzysta może również przystąpić do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym jako przedmiotu dodatkowego.

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym sprawdza, w jakim stopniu zdający spełnia wymagania określone w [podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej](https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2015/Formula_2023/podstawa_programowa/matematyka.pdf).

Podstawa programowa dzieli wymagania na ogólne i szczegółowe. Wymagania ogólne mają podstawowe znaczenie, gdyż syntetycznie ujmują nadrzędne cele kształcenia w nauczaniu matematyki. Wymagania szczegółowe odwołują się do ściśle określonych wiadomości i konkretnych umiejętności.

„Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2022/2023” jest podzielony na dwie części, zamieszczone jako osobne pliki.

Część pierwsza zawiera:

- szczegółowy opis egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym

- przykładowe zadania egzaminacyjne (wraz z rozwiązaniami oraz zasadami oceniania) na poziomie podstawowym.

Część druga zawiera:

- szczegółowy opis egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym

- przykładowe zadania egzaminacyjne (wraz z rozwiązaniami oraz zasadami oceniania) na poziomie rozszerzonym.

„Informator” prezentuje przykładowe zadania egzaminacyjne wraz z rozwiązaniami. Zadania w „Informatorze” nie ilustrują wszystkich wymagań z zakresu matematyki na poziomie rozszerzonym określonych w podstawie programowej, nie wyczerpują również wszystkich typów zadań, które mogą wystąpić w arkuszu egzaminacyjnym. Tylko realizacja wszystkich wymagań z podstawy programowej, zarówno ogólnych, jak i szczegółowych, może zapewnić właściwe przygotowanie w zakresie matematyki, w tym – właściwe przygotowanie do egzaminu maturalnego.

Zadania na egzaminie

Zadania na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie rozszerzonym będą wyłącznie zadaniami otwartymi.

Zadania otwarte to takie, w których zdający samodzielnie formułuje odpowiedź. Wśród zadań otwartych na egzaminie maturalnym z matematyki znajdą się m.in.:

- zadania krótkiej odpowiedzi, wymagające zapisania przeprowadzonego rozumowania zwykle w kilku, w dwóch lub trzech krokach

- zadania rozszerzonej odpowiedzi, wymagające utworzenia strategii rozwiązania problemu matematycznego, jej realizacji i weryfikacji uzyskanego wyniku.

Przedstawione przez zdającego rozwiązanie zadania otwartego, w którym zdający m.in. oblicza, wyznacza, wyprowadza, uzasadnia, wykazuje, musi prezentować pełny tok rozumowania, uwzględniać warunki zadania, a także odwoływać się do twierdzeń matematycznych i własności odpowiednich obiektów matematycznych.

Wszystkie zadania egzaminacyjne będą sprawdzały poziom opanowania umiejętności opisanych w następujących wymaganiach ogólnych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej (w nawiasach zapisano numery celów kształcenia podstawy programowej):

- sprawność rachunkowa (I)

- wykorzystanie i tworzenie informacji (II)

- wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (III)

- rozumowanie i argumentacja (IV)

Zadania egzaminacyjne będą dotyczyły następujących obszarów tematycznych matematyki (w nawiasach zapisano numery treści nauczania podstawy programowej):

- liczby rzeczywiste, wyrażenia algebraiczne, równania i nierówności, układy równań (I, II, III, IV)

- funkcje, ciągi, trygonometria, optymalizacja i rachunek różniczkowy (V, VI, VII, XIII)

- planimetria, geometria analityczna, stereometria (VIII, IX, X)

- kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka (XI, XII).

Aby sprawdzić opanowanie przez zdających wymagania ogólnego „IV. rozumowanie i argumentacja”, wśród zadań egzaminacyjnych znajdą się zadania na dowodzenie, wymagające od zdającego przeprowadzenia dowodu matematycznego. W celu sprawdzenia opanowania przez zdających wymagania ogólnego „III. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych” w „Informatorze” znajdą się również zadania z kontekstem praktycznym/realistycznym. Zadania tego typu będą miały uproszczone założenia, tzn. będą pomijały niektóre rzeczywiste warunki. Dzięki takiej idealizacji zagadnienia będzie można łatwiej zbudować jego adekwatny model matematyczny, który – po pierwsze – będzie opisywał istotę zagadnienia, po drugie – będzie korzystał z narzędzi dostępnych na danym etapie nauczania, a po trzecie – nie będzie wymagał specjalistycznej wiedzy z danego kontekstu.

Opis arkusza egzaminacyjnego

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym trwa 270 minut.

W arkuszu egzaminacyjnym znajdzie się od 10 do 14 zadań otwartych.

Łączna liczba punktów, jakie można uzyskać za prawidłowe rozwiązanie wszystkich zadań w arkuszu, jest równa 50.

W arkuszu egzaminacyjnym będą występowały wiązki zadań lub pojedyncze zadania. Wiązka zadań to zestaw od dwóch do czterech zadań występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań wiązki można rozwiązać niezależnie od rozwiązania innych zadań w danej wiązce. Wiązka zadań będzie składać się z zadań otwartych.

Zasady oceniania

Zadania otwarte

Za poprawne rozwiązanie zadania otwartego będzie można otrzymać maksymalnie 2, 3, 4, 5 lub 6 punktów. Za każde poprawne rozwiązanie, inne niż opisane w zasadach oceniania, można przyznać maksymalną liczbę punktów, o ile rozwiązanie jest merytorycznie poprawne, zgodne z poleceniem i warunkami zadania.

Zadania otwarte mogą być krótkiej odpowiedzi lub rozszerzonej odpowiedzi.

Zadania otwarte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

Zadania otwarte (krótkiej odpowiedzi)

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 2 pkt:

2 pkt – rozwiązanie poprawne.

1 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale

rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, albo

brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 3 pkt:

3 pkt – rozwiązanie poprawne.

2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 4 pkt:

4 pkt – rozwiązanie poprawne.

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania.

Zadania otwarte (rozszerzonej odpowiedzi)

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 5 pkt:

5 pkt – rozwiązanie poprawne.

4 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, jednak dalsza część rozwiązania zadania zawiera usterki (np. błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań);

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało dalej dokończone lub w dalszej części rozwiązania wystąpiły błędy merytoryczne.

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 6 pkt:

6 pkt – rozwiązanie poprawne.

5 pkt – rozwiązanie, w którym zostały bezbłędnie pokonane zasadnicze trudności zadania, jednak dalsza część rozwiązania zadania zawiera usterki (np. błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań);

4 pkt – rozwiązanie, w którym zostały bezbłędnie pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało dalej dokończone lub w dalszej części rozwiązania wystąpiły błędy merytoryczne.

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy lub usterki.

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania.

W rozwiązaniu zadań otwartych wyróżniony został najważniejszy etap, nazywany pokonaniem zasadniczych trudności zadania. Przyjęto zasadę, że za pokonanie zasadniczych trudności zadania przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie można otrzymać za bezbłędne rozwiązanie danego zadania. Przed pokonaniem zasadniczych trudności zadania wyróżnia się jeszcze jeden etap (w przypadku zadań za 3 pkt) lub dwa etapy poprzedzające (w przypadku zadań za 4 i więcej pkt): dokonanie istotnego postępu w rozwiązaniu zadania oraz/lub dokonanie niewielkiego postępu, który jest konieczny do rozwiązania zadania.

Etapy rozwiązania dla każdego zadania będą opisane w zasadach oceniania dla danego zadania.

Wybrane oznaczenia i symbole matematyczne

W zadaniach z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym mogą być stosowane następujące oznaczenia i symbole matematyczne:

N – zbiór liczb naturalnych

Z – zbiór liczb całkowitych

Q – zbiór liczb wymiernych

R – zbiór liczb rzeczywistych

– suma zbiorów A oraz B

– iloczyn zbiorów A i B (część wspólna zbiorów A i B)

– różnica zbioru A i zbioru .

– zbiór A jest podzbiorem zbioru B

– element x należy do zbioru A

– zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że

– zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że

– zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że

– zbiór wszystkich liczb rzeczywistych takich, że

Krańce przedziałów domkniętych zdający może oznaczać także – odpowiednio:

, , .

W zadaniach z matematyki na poziomie rozszerzonym mogą być stosowane następujące symbole i oznaczenia matematyczne:

– spójnik logiczny „i”, np. oznacza zdanie: „p i q”

– spójnik logiczny „lub”, np. oznacza zdanie: „p lub q”

– oznacza zdanie: „jeśli p, to q”

– oznacza zdanie: „p wtedy i tylko wtedy, gdy q”

– a jest dzielnikiem b

– zbiór pusty.

Materiały i przybory pomocnicze na egzaminie z matematyki

Materiały i przybory pomocnicze, z których mogą korzystać zdający na egzaminie maturalnym z matematyki, to:

- linijka

- cyrkiel

- kalkulator prosty

- wybrane wzory matematyczne.

Szczegółowe informacje dotyczące materiałów i przyborów pomocniczych, z których mogą korzystać zdający na egzaminie maturalnym (w tym osoby, którym dostosowano warunki przeprowadzenia egzaminu), będą ogłaszane w komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.

2. Przykładowe zadania z rozwiązaniami

W „Informatorze” dla każdego zadania podano:

- liczbę punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie (w nawiasach, po numerze zadania)

- zasady oceniania rozwiązania tego zadania

- przykładowe rozwiązanie tego zadania.

W przykładowych rozwiązaniach zadań otwartych są wyodrębnione dodatkowe komentarze, które nie podlegają ocenie. Początek i koniec komentarza oznaczono nawiasami kwadratowymi [ ].

LICZBY RZECZYWISTE, WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE,

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

Zadanie 1. (0–6)

Dany jest układ równań (1)

z niewiadomymi x i y oraz parametrem m.

Wyznacz takie wszystkie wartości parametru m, dla których układ jest oznaczony, a para liczb będąca rozwiązaniem układu, spełnia warunek .

Zasady oceniania

6 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wszystkich wartości parametru m spełniających warunki zadania oraz prawidłowy wynik.

5 pkt – rozwiązanie nierówności .

4 pkt – rozwiązanie jednej z nierówności

3 pkt – zapisanie nierówności

2 pkt – wyznaczenie z układu (1) x oraz y.

1 pkt – określenie wartości parametru m dla jakich układ jest oznaczony i wyznaczenie z układu (1) x lub y.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Rozwiązujemy układ (1) metodą podstawiania. Z pierwszego równania układu wyznaczamy y: ]

[ Komentarz  
i wstawiamy do drugiego równania układu: ]

Zatem układ jest oznaczony, gdy . Wtedy

Stąd

[ Komentarz

Wyznaczamy wartości parametru m, dla których prawdziwa jest nierówność : ]

co daje nam .

Zadanie 2. (0–3)

Dane są liczby

 .

Oblicz .

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne obliczenie i prawidłowy wynik.

2 pkt – poprawne obliczenie a oraz przekształcenie b do postaci np. .

1 pkt – poprawne obliczenie a lub przekształcenie b do postaci logarytmu o podstawie 2 lub 4, np. .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Obliczamy a oraz b z wykorzystaniem wzoru na zamianę podstawy logarytmu: ]

[ Komentarz

Obliczamy : ]

Zadanie 3. (0–3)

Na diagramie przedstawiono fragment wykresu wielomianu W określonego wzorem

dla każdego .

Oblicz wszystkie pierwiastki wielomianu W.

0,2

y

x

0

1

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie wszystkich pierwiastków wielomianu W.

2 pkt – sprawdzenie, że liczba jest pierwiastkiem wielomianu oraz podzielenie wielomianu W przez dwumian .

1 pkt – zastosowanie twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu i określenie liczb wymiernych mogących być pierwiastkami wielomianu W.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Skorzystamy z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych. ]

Jeśli wielomian W o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny, to należy on do zbioru

[ Komentarz

Na podstawie fragmentu wykresu funkcji W stwierdzamy, że jeden z pierwiastków wielomianu znajduje się w przedziale. Tylko jedna liczba ze zbioru M leży w tym

przedziale i jest to ułamek .

Sprawdzamy, czy liczba jest pierwiastkiem wielomianu W: ]

[ Komentarz

Zatem wielomian jest podzielny przez dwumian .

Dzielimy wielomian W przez dwumian i zapisujemy go w postaci iloczynowej: ]

Pierwiastkami trójmianu są liczby: oraz .

Pierwiastkami wielomianu W są liczby: , oraz .

Zadanie 4. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem

Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji f.

Zasady oceniania

3 pkt – prawidłowe określenie wszystkich czterech możliwych przypadków, dla których i prawidłowe wyznaczenie czterech punktów kratowych.

2 pkt – prawidłowe określenie dwóch z czterech możliwych przypadków, dla których i prawidłowe wyznaczenie dwóch punktów kratowych.

1 pkt – przekształcenie postaci ogólnej funkcji homograficznej do postaci kanonicznej.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Funkcję f przedstawiamy w postaci: ]

[ Komentarz

Wyznaczamy punkty kratowe. ]

Wartość funkcji będzie liczbą całkowitą tylko wtedy, gdy .

[Komentarz

Szukamy całkowitych wartości x (rożnych od 13) takich, dla których jest

dzielnikiem. To prowadzi do następujących czterech przypadków: ]

I. , co daje i

II. , co daje i

III. , co daje i

IV. , co daje i .

Do wykresu funkcji f należą cztery punkty kratowe o współrzędnych: , , , .

Zadanie 5. (0–3)

Wielomian W jest określony wzorem dla każdego .

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zasady oceniania

3 pkt – zapisanie zbioru tych wszystkich wartości parametru m, dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

2 pkt – wyznaczenie tych wszystkich wartości parametru m, dla których funkcja nie ma miejsc zerowych lub

– wyznaczenie tych wszystkich wartości parametru m dla których funkcja   
 ma dokładnie jedno miejsce zerowe równe 1.

1 pkt – zapisanie, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu W i zapisanie warunków, jakie muszą być spełnione, aby wielomian W miał dokładnie jedno miejsce zerowe.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że liczba jest pierwiastkiem wielomianu W. Zatem wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty tylko wtedy, gdy funkcja ma dokładnie jedno miejsce zerowe równe 1 lub gdy funkcja f nie ma miejsc zerowych.

Zatem

Nierówność jest sprzeczna, natomiast z warunków

otrzymujemy .

Odp. .

Zadanie 6. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem dla każdego .

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

Zasady oceniania

4 pkt – zapisanie zbioru tych wszystkich wartości parametru p, dla których funkcja ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

3 pkt – zapisanie nierówności w zależności od parametru p i jej rozwiązanie oraz zapisanie warunku w zależności od parametru p i jego rozwiązanie.

2 pkt – zapisanie nierówności w zależności od parametru p i jej rozwiązanie lub

– zapisanie warunku w zależności od parametru p i jego rozwiązanie.

1 pkt – wyznaczenie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby funkcja f miała dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Wyznaczamy warunki konieczne i dostateczne na to, aby funkcja f miała dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o jeden: ]

W1. (z treści zadania f jest funkcją kwadratową)

W2. (aby funkcja f miała dokładnie dwa miejsca zerowe)

W3. (aby miejsca zerowe funkcji f różniły się o 1).

[ Komentarz

Rozwiązujemy warunek W2: ]

[ Komentarz

Rozwiązujemy warunek W3. Skorzystamy tutaj ze wzorów Viète’a. ]

Gdy mamy

Po uwzględnieniu wszystkich warunków otrzymujemy:

FUNKCJE, CIĄGI, TRYGONOMETRIA,  
OPTYMALIZACJA I RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Zadanie 7. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem   dla każdego .

Wykaż, że f jest funkcją rosnącą.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – poprawne określenie znaku pochodnej

1 pkt – przyjęcie założenia oraz obliczenie pochodnej

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech . Obliczamy pochodną funkcji f:

dla każdego .

Funkcja f jest różniczkowalna w przedziale , a jej pochodna jest w każdym punkcie tego przedziału dodatnia. Zatem funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

To kończy dowód.

Zadanie 8. (0–2)

Oblicz granicę .

Zasady oceniania

2 pkt – prawidłowa metoda obliczenia granicy (zastosowanie twierdzenia o trzech ciągach) i prawidłowy wynik.

1 pkt – zauważenie, że:

i obliczenie granic ciągów oraz .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. ]

Rozważmy ciągi oraz określone dla każdego .

Zauważmy, że dla każdego , więc

Ponadto oraz , więc na podstawie twierdzenia o trzech ciągach .

Zadanie 9. (0–4)

Syzyf codziennie stoi przed zadaniem wtoczenia ciężkiej kamiennej kuli na szczyt pewnej góry. Jego położenie określono na osi Ox, która jest skierowana do wierzchołka góry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza góry.

W chwili znajduje się on w punkcie O oddalonym od szczytu o 4 km, a położenie x Syzyfa wtaczającego kulę jest opisane równaniem

dla

gdzie x jest wyrażone w metrach, a t – w godzinach.

Oblicz najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, oraz maksymalną prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia najmniejszej odległości, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, i poprawna metoda wyznaczenia największej wartości prędkości, z jaką wtaczany jest kamień, wraz z prawidłowymi wynikami liczbowymi.

3 pkt – zapisanie, że prędkość jest pochodną funkcji położenia i znalezienie ekstremów funkcji  .

2 pkt – zbadanie monotoniczności funkcji x i znalezienie ekstremów funkcji x.

1 pkt – obliczenie pochodnej funkcji x.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Najpierw wyznaczymy najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry.

Obliczamy pochodną funkcji x: ]

dla

[ Komentarz

i obliczamy jej miejsca zerowe: ]

Ponieważ:

dla

dla

więc

funkcja x jest rosnąca w przedziale

funkcja x jest malejąca w przedziale

Zatem i Syzyf zbliży się do wierzchołka góry na odległość  m.

[ Komentarz

Obliczamy maksymalną wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę.

Niech v oznacza prędkość Syzyfa wtaczającego kulę. ]

Ponieważ , więc

dla

[ Komentarz

Korzystamy z własności funkcji kwadratowej i obliczamy największą wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę: ]

Zatem największa wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę pod górę jest równa

m/h.

Zadanie 10. (0–6)

Cztery miasta A, B, C i D znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku 300 km. Pewna firma dostała zlecenie na zaprojektowanie sieci dróg, która będzie łączyć każde dwa z tych miast. Sieć ma posiadać dwa węzły, a łączna długość dróg w sieci ma być możliwie najmniejsza. (Przykład sieci dróg z dwoma węzłami, łączącej każde dwa z miast, przedstawiono na rysunku).

Oblicz, jaka musi być długość najkrótszej takiej sieci dróg i gdzie muszą być zlokalizowane węzły tej sieci.

Wskazówka:

Ze wszystkich trójkątów o danej podstawie i wysokości najmniejszy obwód ma trójkąt równoramienny.

D

A

C

B

300 km

300 km

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie długości najkrótszej sieci z dwoma węzłami i podanie lokalizacji węzłów względem miast.

5 pkt – obliczenie długości najkrótszej sieci z dwoma węzłami.

4 pkt – obliczenie wartości najmniejszej funkcji f.

3 pkt – obliczenie pochodnej funkcji f.

2 pkt – wyrażenie długości sieci za pomocą odległości węzłów od prostych odpowiednio AD i BC.

1 pkt – uzasadnienie, że węzły muszą się znajdować na symetralnej odcinka AD.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy szukane węzły sieci przez M i N. Ze wskazówki wynika, że trójkąty AMD oraz BNC mają najmniejsze obwody, gdy są równoramienne. Zatem

.

Punkty M i N należą do symetralnej odcinków AD i BC oraz odcinek MN jest równoległy do odcinka AB.

Oznaczmy odległość punktu M od prostej AD przez x, natomiast punktu N od prostej BC przez y. Długość d sieci z węzłami M i N jest równa

gdzie i .

Zbadamy funkcję określoną dla .

Funkcja f jest malejąca w przedziale i rosnąca w przedziale . Najmniejszą wartość funkcja przyjmuje w punkcie i wartość ta jest równa .

Zatem

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy . Najkrótsza sieć dróg ma zatem długość km i składa się z 5 odcinków: AM, MD, MN, NC, NB.

Węzeł M jest równo oddalony (w odległości km) od miast A i D, natomiast węzeł N jest równo oddalony (w odległości km) od miast B i C.

[ Komentarz

Zauważmy jeszcze, że w przypadku sieci dróg z jednym węzłem, najkrótsza taka sieć będzie miała długość równą km (i węzeł w środku kwadratu ABCD). Będzie więc dłuższa niż sieć z dwoma węzłami. ]

Zadanie 11. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem

dla wszystkich

Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału .

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – zauważenie, że:

i oraz uzasadnienie, że funkcja jest ciągła.

1 pkt – obliczenie wartości funkcji f np. na krańcach przedziału .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Obliczymy wartości funkcji na krańcach przedziału . ]

Zauważmy, że i .

Funkcja f jest funkcją ciągłą, jako suma funkcji ciągłych. Ma zatem własność Darboux. Dlatego w przedziale przyjmuje wszystkie wartości z zakresu . W szczególności przyjmuje wartość 0 dla pewnego .

To kończy dowód.

Zadanie 12. (0–4)

Funkcja f jest określona wzorem dla każdego.

Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji.

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie wartości najmniejszej funkcji f.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla .

2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji f.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Wyznaczamy pochodną funkcji f korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej: ]

dla .

[ Komentarz

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji f: ]

Pierwsze z tych równań ma rozwiązanie , natomiast drugie jest sprzeczne.

[ Komentarz

Sprawdzamy, czy w punkcie funkcja f osiąga ekstremum. Badamy monotoniczność funkcji f stosując rachunek pochodnych: ]

więc

funkcja f jest malejąca w zbiorze

funkcja f jest rosnąca w zbiorze ,

co oznacza, że w punkcie funkcja f ma ekstremum lokalne, będące jednocześnie minimum globalnym. Funkcja f osiąga wartość najmniejszą równą

Zadanie 13. (0–4)

W nieskończonym malejącym ciągu geometrycznym , określonym dla , jest spełniony warunek

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 6.

Wyznacz wzór na –ty wyraz ciągu .

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie ilorazu, pierwszego wyrazu ciągu oraz zapisanie wzoru ogólnego ciągu.

3 pkt – obliczenie ilorazu lub pierwszego wyrazu ciągu.

2 pkt – zapisanie dwóch równań z niewiadomymi q i a1, które pozwalają na obliczenie ilorazu ciągu oraz pierwszego wyrazu ciągu.

1 pkt – zapisanie równania z niewiadomymi q i/lub a1, które wynika z treści zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Z warunku

oraz z informacji o monotoniczności ciągu otrzymamy iloraz q ciągu : ]

Ciąg jest ściśle monotoniczny, więc .

Ponieważ dla ciąg ten jest zbieżny, więc sumę

możemy zapisać następująco:

i otrzymujemy

Wzór ogólny ciągu ma postać:

Zadanie 14. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem dla każdego .

Wykaż, że liczba 5 należy do zbioru wartości tej funkcji.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – uzasadnienie, że funkcja f jest funkcją ciągłą, wskazanie argumentu, dla którego wartość funkcji jest mniejsza od 5 wraz z obliczeniem wartości funkcji dla tego argumentu i wskazanie argumentu, dla którego wartość funkcji jest większa od 5 wraz z obliczeniem wartości funkcji dla tego argumentu lub

– uzasadnienie, że funkcja f jest funkcją ciągłą, wskazanie argumentu, dla którego wartość funkcji jest większa od 5 i obliczenie wartości funkcji dla tego argumentu lub

– wskazanie argumentu, dla którego wartość funkcji jest mniejsza od 5 wraz z obliczeniem wartości funkcji dla tego argumentu i wskazanie argumentu, dla którego wartość funkcji jest większa od 5 wraz z obliczeniem wartości funkcji dla tego argumentu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja f jest funkcją ciągłą w zbiorze liczb rzeczywistych, ponieważ jest funkcją wielomianową.

Ponieważ oraz i funkcja jest ciągła na przedziale , więc, na mocy twierdzenia Darboux, przyjmuje w przedziale wszystkie wartości pośrednie pomiędzy a . Wobec tego istnieje taki argument , dla którego zachodzi . To oznacza, że liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji.

Zadanie 15. (0–4)

Rozwiąż nierówność

w zbiorze .

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne rozwiązanie podanej w poleceniu nierówności w zbiorze .

3 pkt – poprawne rozwiązanie jednej z nierówności lub .

2 pkt – zapisanie nierówności w postaci koniunkcji dwóch nierówności.

1 pkt – przekształcenie nierówności do postaci, w której występuje jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Przekształcamy nierówność podaną w treści zadania do prostszej postaci. Skorzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta: ]

[ Komentarz

Korzystamy z wykresu funkcji cosinus i odczytujemy rozwiązania ostatnich dwóch nierówności w przedziale : ]

Otrzymujemy rozwiązanie: .

Zadanie 16. (0–3)

Wykaż, że równanie ma w przedziale co najmniej dwa różne rozwiązania.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – podanie dla funkcji  
 takich trzech argumentów  leżących w przedziale , dla których , i .

1 pkt – podanie dla funkcji takich dwóch argumentów

leżących w przedziale , dla których .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech f będzie funkcją określoną wzorem dla .

[ Komentarz

Obliczymy wartości funkcji f w kilku punktach przedziału : ]

Funkcja f jest ciągła jako funkcja wielomianowa, więc na mocy twierdzenia Darboux funkcja f przyjmuje w przedziale wszystkie wartości ze zbioru .

Zatem istnieje takie, że .

Podobnie, funkcja f przyjmuje w przedziale wszystkie wartości ze zbioru , więc istnieje takie, że .

To oznacza, że w przedziale równanie podane w treści zadania ma co najmniej dwa różne rozwiązania.

Zadanie 17. (0–3)

Ciąg jest określony wzorem

dla

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których granica ciągu jest równa 12.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia granicy ciągu i prawidłowo wyznaczona wartość p.

2 pkt – wyznaczenie granicy ciągu w zależności od p.

1 pkt – obliczenie jednej z granic:

lub .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Przekształcamy wzór ciągu do postaci: ]

[ Komentarz

Obliczamy następujące granice: ]

Zatem

Z warunków zadania otrzymujemy , więc .

Zadanie 18.

Rozpatrujemy wszystkie takie prostopadłościany, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 80, pole powierzchni całkowitej jest równe 256 i żadna z krawędzi bryły nie jest krótsza niż 4.

Zadanie 18.1. (0–4)

Wykaż, że układ równań

z niewiadomymi a oraz b ma rozwiązanie, które jest parą liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4 wtedy i tylko wtedy, gdy .

Zasady oceniania

4 pkt – powołanie się na odpowiednie własności funkcji f prowadzące do wniosku, że układ równań ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4.

3 pkt – przyjęcie założenia i zbudowanie funkcji dla podanego zakresu parametru c.

2 pkt – obliczenie wyróżnika równania i podanie argumentacji prowadzącej do wniosku  
.

1 pkt – przyjęcie założenia, że układ równań ma rozwiązanie i zapisanie prawidłowego równania kwadratowego z niewiadomą a (lub b) i parametrem c.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Załóżmy, że układ równań ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4. Wtedy

[ Komentarz

Przekształcamy układ równań do postaci, w której otrzymamy równanie kwadratowe z niewiadomą a i parametrem c: ]

[ Komentarz

Równanie ma z założenia rozwiązanie, więc wyróżnik jest nieujemny, co prowadzi do: ]

Jeśli , to funkcja ma co najmniej jedno miejsce zerowe (gdyż .

Wykresem funkcji f jest parabola, której wierzchołek ma rzędną niedodatnią

.

Odcięta , a ponadto .

Zatem f ma miejsce zerowe w zbiorze .

Podobnie argumentujemy, że funkcja ma miejsce zerowe w przedziale .

Zatem układ równań ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4.

Zadanie 18.2. (0–3)

Objętość każdego z rozpatrywanych prostopadłościanów można wyrazić za pomocą funkcji

gdzie jest długością jednej z krawędzi bryły.

Spośród rozpatrywanych prostopadłościanów oblicz objętość tego prostopadłościanu, którego objętość jest najmniejsza.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie najmniejszej możliwej objętości prostopadłościanu o podanych własnościach.

2 pkt – obliczenie argumentu, dla którego funkcja V osiąga minimum globalne.

1 pkt – obliczenie pochodnej funkcji V.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

W celu znalezienia prostopadłościanu, którego objętość jest najmniejsza, należy zbadać funkcję .

Obliczamy pochodną funkcji V i obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V: ]

[ Komentarz

Zbadamy monotoniczność funkcji V. Ponieważ ]

więc

funkcja V jest rosnąca w przedziałach oraz

funkcja V jest malejąca w przedziale .

Ponieważ , oraz , więc najmniejsza możliwa objętość prostopadłościanu jest równa 256.

Zadanie 19. (0–4)

Na rysunku przedstawiono położenie miejscowości A, B i C oraz zaznaczono odległości między nimi. Odległość między miejscowościami A i B jest równa 15 km, a między miejscowościami A i C – 20 km.

O godzinie 9:00 z miejscowości A do C wyruszył zastęp harcerzy „Tropiciele” i przemieszczał się z prędkością 4 km/h. O tej samej godzinie z miejscowości B do A wyruszył zastęp harcerzy „Korsarze” i przemieszczał się z prędkością 2 km/h.

Wyznacz godzinę, o której odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza.

C

15 km

A

B

20 km

Zasady oceniania

4 pkt – prawidłowa metoda wyznaczenia chwili, w której odległość między zastępami będzie najmniejsza i prawidłowa odpowiedź.

3 pkt – uzasadnienie, że odległość d jest najmniejsza wtedy, gdy wyrażenie podpierwiastkowe jest możliwie najmniejsze oraz podanie zakresu zmienności t.

2 pkt – wyrażenie odległości d między zastępami za pomocą czasu t, jaki upłynął od momentu wyruszenia zastępów.

1 pkt – wyrażenie odległości poszczególnych zastępów od miejscowości A za pomocą czasu, jaki upłynął od momentu wyruszenia zastępów.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech d1 będzie odległością (w km) zastępu „Tropiciele” od miejscowości A.

[ Komentarz

Wyznaczamy zależność d1 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości A: ]

dla .

Niech d2 będzie odległością (w km) zastępu „Korsarze” od miejscowości A.

[ Komentarz

Wyznaczamy zależność d2 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości B: ]

dla .

Odległość d między zastępami w chwili t jest równa

dla .

[ Komentarz

Badamy, dla jakiego argumentu funkcja d osiąga wartość najmniejszą. ]

Ponieważ funkcja jest funkcją rosnącą w przedziale , więc funkcja d osiąga wartość najmniejszą wtedy, gdy funkcja

określona dla

osiąga wartość najmniejszą.

Funkcja f jest funkcją kwadratową, która osiąga wartość najmniejszą dla

.

Zatem funkcja osiąga wartość najmniejszą dla argumentu .

Odległość między zastępami harcerzy będzie najmniejsza o godzinie 10:30.

Zadanie 20. (0–4)

Firma X wytwarza pewien produkt D. Badania rynku pokazały, że związek między ilością produktu D, jaką firma jest w stanie zbyć na rynku, a ceną produktu jest następujący:

dla

gdzie P jest ceną za jednostkę produktu w złotych, a Q – ilością produktu w tys. sztuk.

Koszty K wytworzenia produktu D zależą od ilości Q wytwarzanego produktu następująco:

gdzie K jest kosztem produkcji w tys. zł.

Oblicz, przy jakiej wielkości produkcji firma X osiąga największy dochód. Wynik podaj zaokrąglony z dokładnością do 100 sztuk.

Zasady oceniania

4 pkt – prawidłowa metoda wyznaczenia wielkości produkcji gwarantującej maksymalny dochód i prawidłowy wynik zaokrąglony z podaną dokładnością.

3 pkt – znalezienie ekstremów lokalnych funkcji dochodu .

2 pkt – zapisanie dochodu w zależności od Q.

1 pkt – zapisanie przychodu w zależności od Q.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Dochód Z firmy to przychód R pomniejszony o koszty K.

Ponieważ przychód wyraża się zależnością , więc

[ Komentarz

Wyznaczamy zależność dochodu od wielkości produkcji: ]

[ Komentarz

W celu znalezienia optymalnej wielkości produkcji, przy której dochód jest możliwie największy, należy zbadać funkcję Z. Obliczamy pochodną funkcji Z i miejsca zerowe pochodnej: ]

dla

i

Ponieważ:

dla

dla

więc

funkcja Z jest rosnąca w przedziale

funkcja Z jest malejąca w przedziale

Zatem funkcja Z przyjmuje największą wartość dla argumentu .

Dochód firmy jest największy przy wielkości produkcji 25500 sztuk.

PLANIMETRIA, GEOMETRIA ANALITYCZNA, STEREOMETRIA

Zadanie 21. (0–5)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o podstawie ABCD i wierzchołku E punkt O jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa. Na krawędzi bocznej BE tego ostrosłupa zaznaczono jej środek S (jak na rysunku przekroju DOB ostrosłupa). Stosunek obwodu podstawy ABCD do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy 1 : 5. Przez przekątną AC podstawy i środek S krawędzi bocznej BE poprowadzono płaszczyznę.

Oblicz stosunek pola otrzymanego przekroju ACS do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta BSO (w zaokrągleniu do 1º).

E

2a

2a

S

B

O

D

α

Zasady oceniania

5 pkt – wyznaczenie miary kąta BSO oraz obliczenie stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa.

4 pkt – obliczenie wartości cosinusa kąta BSO oraz stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa.

3 pkt – obliczenie stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa.

2 pkt – wyznaczenie długości odcinka OS w zależności od długości krawędzi podstawy.

1 pkt – wyznaczenie długości krawędzi bocznej w zależności od długości krawędzi podstawy.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy zależność b od a.

Z treści zadania mamy , co daje .

Wyznaczamy zależność od a.

Trójkąt OBE jest prostokątny, punkt S jest środkiem przeciwprostokątnej, więc S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie OBE (jak na rysunku).

Zatem .

Obliczamy stosunek pola przekroju ACS do pola P podstawy ostrosłupa:

[ Komentarz

Do trójkąta BSO zastosujemy twierdzenie cosinusów w celu wyznaczenia cosinusa kąta BSO: ]

Z ostatniego równania otrzymujemy , więc .

Zadanie 22. (0–5)

Proste o równaniach i przecinają się w punkcie P o współrzędnych .

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których współrzędne punktu P spełniają warunki:

, , oraz .

Zasady oceniania

5 pkt – uwzględnienie wszystkich warunków zadania oraz poprawny wynik.

4 pkt – rozwiązanie nierówności

3 pkt – rozwiązanie jednej z nierówności

2 pkt – wyznaczenie wartości m, dla których punkt P leży w I ćwiartce układu współrzędnych.

1 pkt – wyznaczenie współrzędnych punktu P w zależności od m.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Punkt P leży na obu prostych, więc ]

[ Komentarz

Z powyższego układu równań wyznaczamy współrzędne punktu P: ]

Ponieważ i , więc

co daje .

[ Komentarz

Uwzględniamy warunki zadania i : ]

Ponieważ i , więc ostatecznie .

Zadanie 23. (0–4)

Trapez ABCD jest wpisany w okrąg o równaniu

.

Wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne, a odcinek AB jest dłuższą z podstaw tego trapezu. Przekątna AC trapezu ABCD jest zawarta w prostej o równaniu .

Oblicz sinus kąta ABC.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta ABC i obliczenie sinusa kąta ABC.

3 pkt – obliczenie długości promienia okręgu oraz długości odcinka .

2 pkt – obliczenie długości promienia oraz współrzędnych wierzchołków A i C trapezu lub

– obliczenie współrzędnych wierzchołków A i C trapezu oraz obliczenie długości odcinka AC.

1 pkt – obliczenie długości promienia okręgu lub

– obliczenie współrzędnych wierzchołków A i C trapezu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Obliczamy długość promienia R okręgu z równania ogólnego okręgu: ]

[ Komentarz

Obliczamy współrzędne wierzchołków A i C trapezu: ]

Ponieważ wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne, więc otrzymujemy oraz .

[ Komentarz

Obliczamy długość odcinka AC: ]

[ Komentarz

Po zastosowaniu twierdzenia sinusów do trójkąta ABC otrzymujemy ]

Zadanie 24. (0–4)

Czworokąt ABCD jest równoległobokiem takim, że i .

Oblicz pole tego równoległoboku.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia pola równoległoboku i prawidłowy wynik.

3 pkt – obliczenie sinusa kąta BDC.

2 pkt – zastosowanie twierdzenia cosinusów do obliczenia cosinusa kąta BDC.

1 pkt – obliczenie długości boków trójkąta BCD.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Obliczamy długości boków trójkąta BCD: ]

Oznaczmy kąt BDC przez α

[ Komentarz

Z twierdzenia cosinusów oraz ze wzoru obliczamy sinus kąta α: ]

Kąt α jest kątem ostrym, więc

[ Komentarz

Obliczamy pole równoległoboku: ]

Pole czworokąta ABCD jest równe 63.

Zadanie 25. (0–3)

Dany jest sześcian ABCDEFGH o krawędzi długości a. Punkt S jest punktem przecięcia się przekątnych podstawy ABCD tego sześcianu, a punkt P jest środkiem jego krawędzi CG (jak na rysunku przekroju ACGE sześcianu).

Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B, D oraz P

S

E

G

C

A

P

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia odległości wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B, D oraz P i podanie prawidłowego wyniku.

2 pkt – obliczenie pola trójkąta CPS i wyrażenie pola tegoż trójkąta za pomocą h (gdzie h jest szukaną docelowo odległością w zadaniu)

1 pkt – obliczenie odległości pomiędzy środkiem S podstawy ABCD sześcianu a punktem P.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez h – wysokość trójkąta CPS opuszczoną z wierzchołka C na bok PS.

[ Komentarz

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CPS celem obliczenia długości boku PS: ]

[ Komentarz

Ponieważ pole trójkąta CPS jest równe ]

oraz

więc

co daje .

Szukana odległość jest równa .

Zadanie 26. (0–5)

Dany jest trapez prostokątny ABCD o kątach prostych przy wierzchołkach A i D. Ramię BC trapezu ma długość 5. W ten trapez wpisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu 2. Punkt P jest punktem styczności okręgu i dłuższej podstawy AB tego trapezu, E jest punktem styczności okręgu i odcinka BC, a F jest punktem styczności okręgu i odcinka CD (jak na rysunku).

Wykaż, że trójkąty BPS i BSC są trójkątami podobnymi, oraz oblicz skalę tego podobieństwa.

D

F

C

E

5

A

P

S

2

B

Zasady oceniania

5 pkt – obliczenie skali podobieństwa trójkątów PBS oraz BSC.

4 pkt – obliczenie długości odcinka stycznej (zawierającej odcinek BC) od punktu B do punktu styczności z okręgiem.

3 pkt – uzasadnienie, że trójkąty BPS i BSC są podobne.

2 pkt – uzasadnienie, że kąt BSC jest kątem prostym

1 pkt – uzasadnienie równości miar kątów PBS oraz SBC (lub BCS oraz SCD).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wykażemy, że trójkąty BPS i BSC są podobne.

Punkt S jest równooddalony od boków AB i BC trapezu jako środek okręgu wpisanego w trapez, więc leży na dwusiecznej kąta ABC. Zatem .

Podobna argumentacja prowadzi do stwierdzenia, że .

Oznaczmy

i .

Ponieważ suma miar kątów przy ramieniu trapezu wynosi 180°, więc , skąd dalej . Dlatego:

oraz

To oznacza, że (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów).

[ Komentarz

Obliczymy skalę podobieństwa trójkątów BPS oraz BSC. ]

Ponieważ oraz , więc trójkąty prostokątne i są podobne. Zatem

i dalej

Z twierdzenia o odcinkach stycznych mamy oraz .

Ponieważ , więc i w konsekwencji oraz .

Po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa do trójkąta BSE otrzymujemy .

[ Komentarz

Obliczamy skalę podobieństwa trójkątów BSC i BPS: ]

Zadanie 27. (0–4)

Tomek zbudował stożek o kącie rozwarcia α i wysokości H. Na brzegu podstawy stożka zaznaczył punkt P, a na powierzchni bocznej stożka punkt B taki, że należał on do przekroju osiowego PQS tego stożka i znajdował się w odległości h od jego podstawy (jak na rysunku 1. przekroju PQS). Następnie na powierzchni bocznej stożka rysował linie łączące punkty P i B.

Oblicz długość najkrótszej takiej linii łączącej punkty P i B.

Wskazówka: Powierzchnia boczna stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i rozłożeniu jest wycinkiem koła (jak na rysunku 2.).

Rysunek 1.

h

H

B

S

Q

P

S

B

P

Rysunek 2.

Zasady oceniania

4 pkt – prawidłowa metoda obliczenia długości odcinka PB na siatce stożka i prawidłowy wynik.

3 pkt – obliczenie miary łukowej kąta BSP na siatce stożka i obliczenie długości odcinków BS oraz PS.

2 pkt – obliczenie miary łukowej kąta BSP na siatce stożka lub

– obliczenie długości odcinków BS oraz PS.

1 pkt – zapisanie, że najkrótsza długość linii sprowadza się do obliczenia długości odcinka BP na siatce stożka.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech l będzie długością tworzącej stożka, a R – długością promienia podstawy.

Długość najkrótszej linii na powierzchni bocznej stożka łączącej punkty P i B jest równa długości odcinka PB na tej powierzchni. Oznaczymy ją jako d.

[ Komentarz

Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu długości l. Wyznaczymy miarę β kąta środkowego tego wycinka. ]

Ze wzorów na pole powierzchni bocznej stożka oraz pole wycinka koła otrzymujemy

Zatem

Kąt rozwarcia stożka jest równy , więc , co prowadzi do

[ Komentarz

Wyrazimy długości odcinków BS oraz PS w zależności od danych podanych w treści zadania. ]

Rozważmy przekrój osiowy stożka (rysunek 2.).

Zatem

oraz

[ Komentarz

W celu obliczenia stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BSP: ]

KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

Zadanie 28. (0–4)

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną dodatnią. Ze zbioru losujemy jednocześnie trzy liczby. Zdarzenie A odpowiada jednoczesnemu wylosowaniu ze zbioru M trzech liczb, takich że suma tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody wyznaczenia szukanego prawdopodobieństwa oraz prawidłowy wynik.

3 pkt – rozpatrzenie wszystkich możliwych przypadków, kiedy suma trzech liczb naturalnych daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, tj. zapisanie, że moc zbioru A wynosi

2 pkt – rozpatrzenie tylko dwóch z wszystkich możliwych przypadków, kiedy suma trzech liczb naturalnych daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1 – tj. zapisanie, że moc zbioru A wynosi

lub

lub

1 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich trójelementowych podzbiorów zbioru M.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy liczbę wszystkich trójelementowych podzbiorów zbioru M:

[ Komentarz

Wyznaczamy moc zbioru A. ]

Zauważmy, że suma trzech liczb naturalnych daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, gdy:

- dwie z tych liczb są podzielne przez 3, a jedna z tych liczb daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1 lub

- dwie z tych liczb dają przy dzieleniu przez 3 resztę 1, a jedna z tych liczb daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2 lub

- dwie z tych liczb dają przy dzieleniu przez 3 resztę 2, a jedna z tych liczb jest podzielna przez 3.

Ponieważ w zbiorze M mamy:

n liczb podzielnych przez 3,

liczb, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1,

n liczb, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2, więc

Szukane prawdopodobieństwo jest równe

Zadanie 29. (0–4)

Pan Nowak często gra z synem w szachy. Obliczył, że 60% rozegranych partii wygrywa jego syn.

Oblicz, ile partii szachów musi rozegrać z synem pan Nowak, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca przynajmniej jednej partii w całej rozgrywce było większe od 0,95.

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie nierówności: i podanie odpowiedzi.

3 pkt – zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach i zapisanie nierówności:

.

2 pkt – zapisanie nierówności:

.

1 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Próbą Bernoullego jest rozegranie pojedynczej partii szachów z synem. Sukcesem w tej próbie jest wygrana pana Nowaka z synem w pojedynczej partii. ]

Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe , natomiast prawdopodobieństwo porażki jest równe .

Niech n oznacza szukaną liczbę partii oraz niech

– oznacza niewygranie przez ojca żadnej partii szachów,

– oznacza wygranie przez ojca jednej partii szachów,

– oznacza wygranie przez ojca dwóch partii szachów,

…

– oznacza wygranie przez ojca n partii szachów.

[ Komentarz

Korzystamy ze schematu Bernoullego. Prawdopodobieństwo wygrania przez pana Nowaka co najmniej jednej partii szachów jest równe ]

Zatem

Pan Nowak musi rozegrać z synem co najmniej sześć partii.

Zadanie 30. (0–3)

Pewna choroba dotyka 0,2% całej populacji i w początkowym stadium nie daje widocznych objawów chorobowych. W ramach profilaktyki stosuje się pewien test przesiewowy, który daje wynik pozytywny lub negatywny. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie chorej da wynik pozytywny (oznaczający chorobę) jest równe 0,99. Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie zdrowej da wynik negatywny, jest równe 0,98.

Pan X poddał się testowi, który dał wynik pozytywny. Pozytywny wynik oznacza podejrzenie choroby.

Oblicz, prawdopodobieństwo tego, że Pan X jest rzeczywiście chory.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia szukanego prawdopodobieństwa i prawidłowy wynik.

2 pkt – zastosowanie wzoru Bayesa.

1 pkt – obliczenie prawdopodobieństw warunkowych oraz .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

D – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji poddana testowi otrzyma wynik pozytywny,

M – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji poddana testowi otrzyma wynik negatywny,

Z – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji jest zdrowa,

C – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji jest chora.

Należy obliczyć .

Zgodnie z treścią zadania:

, więc

, więc

, więc .

Stosujemy twierdzenie Bayesa i obliczamy szukane prawdopodobieństwo:

Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi ok. 0,09.